

高等工程力学系列规划教材

工程断裂与损伤

庄 苗 蒋持平 编著
张 行 主审



1125

31

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

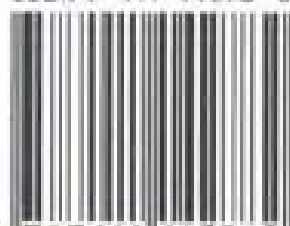
ISBN 7-111-14278-0/TB·423(课)

封面设计 电脑制作 姚毅

高等工程力学系列规划教材

书 名	作 者			主 审
工程弹塑性力学	杨伯源	张义同		徐秉业
工程断裂与损伤	庄 苗	蒋持平		张 行
工程动力学振动与控制	徐铭陶	肖明葵		贾书惠
线性与非线性有限元及其应用	郭乙木	陶伟明	庄 苗	丁皓江 姚振汉
复合材料与粘弹性力学	张少实	庄 苗		杜善义
工程实验力学	计欣华	鲁 阳	邓宗白	戴福隆

ISBN 7-111-14278-0



9 787111 142782 >

定价: 13.50 元

地址: 北京市西三环北路22号

邮政编码: 100027

联系电话: (010) 68329294

网址: <http://www.cmpbook.com>

E-mail: order@cmpbook.com

高等工程力学系列规划教材

工程断裂与损伤

庄 苗 蒋持平 编著
张 行 主审



机械工业出版社

本书为工程断裂力学和损伤力学的基础内容。它以精炼的内容和较小的篇幅,主要介绍了断裂力学和损伤力学的经典内容和研究进展,以及工程应用。每一章内容突出主要的命题、公式和应用举例,并附有留给读者思考和练习的习题。书后提供了主要的参考文献。

本书可作为力学专业高年级本科生和非力学专业研究生的断裂力学和损伤力学课程教材,也可以作为从事断裂与损伤研究的研究人员和工程师的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工程断裂与损伤/庄茁,蒋持平编著. —北京:机械工业出版社, 2004.5

(高等工程力学系列规划教材)

ISBN 7-111-14278-0

I. 工… II. ①庄…②蒋… III. ①工程力学-断裂力学-高等学校-教材②工程结构-损伤-高等学校-教材 IV. TB125

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第026917号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

责任编辑:季顺利 版式设计:霍永明 责任校对:肖琳

封面设计:姚毅 责任印制:李妍

北京蓝海印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2004年5月第1版第1次印刷

1000mm×1400mm B5·4.875印张·189千字

定价:13.50元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换
本社购书热线电话(010)68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

高等工程力学系列规划教材编委会

主任委员 徐秉业

副主任委员 郭乙木 庄 茁 亢一澜 林 松

委 员 (按姓氏笔画排序)

计欣华 亢一澜 邓宗白 张少实

张义同 庄 茁 朱为玄 林 松

季顺利 肖明葵 杨伯源 武建华

郭乙木 徐秉业 徐铭陶 陶伟明

蒋持平 鲁 阳

秘 书 季顺利

前 言

从20世纪的20年代创立到50年代兴起,延续到90年代的发展,断裂力学走过了80多年的历史,成为20世纪的新兴力学学科,作为固体力学的重大成就,它已经在结构强度设计、安全可靠性分析和缺陷评定规范与标准中得到广泛的应用,大大提高了工业部门的设计与制造水平。作为断裂力学的姊妹分支学科,损伤力学是20世纪70年后才发展起来的新学科。断裂力学着眼于裂纹的起裂、扩展,直至破坏或者止裂的过程和结果,而损伤力学着眼于裂纹的形成和演化。随着工程力学学科的发展、工程结构设计的需求和新材料、新工艺及新学科的诞生,断裂力学和损伤力学的研究方兴未艾,从而开创了含损伤的断裂力学,即破坏力学新学科。

本书的内容分为10章。第1章介绍了工程断裂问题和材料的断裂韧性;第2章讨论了线弹性断裂力学,给出了确定应力强度因子的若干方法和解答;第3章为弹塑性断裂力学,给出了 J 积分的公式和应用;第4章阐述了裂纹扩展和止裂的基本内容,给出了裂纹扩展寿命的计算;第5章介绍了断裂韧度的实验测量和分析,论述了影响材料断裂韧度的主要因素;第6章讨论了动态断裂力学问题,给出了裂纹解理和延性扩展的条件和速度;第7章描述了断裂力学中的若干高等问题,如复合型裂纹判据和板壳断裂力学问题等;第8章给出了断裂力学在工程中的若干应用;第9章概述了损伤力学的基本概念和本构关系;第10章简要介绍了含损伤的断裂力学,即破坏力学的若干应用。在附录A介绍了Wester-gaard应力函数法并在附录B推导了 J 积分。本书全部内容讲授需要30左右的教学学时。

在编写过程中,本书前8章的初稿曾蒙清华大学杨卫院士提出修改意见,而全书的完成得益于北京航空航天大学张行教授的多次指教和修改,清华大学徐秉业教授一直关注和指导本书的编著。另外,硕士研究生郭宇完成了部分绘图工作,在此一并表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,难免有错误和笔误,希望读者赐教,作者深表谢忱。

作 者

目 录

前言

第 1 章 工程断裂问题与材料断裂韧度	1
1.1 工程断裂问题	1
1.2 材料断裂韧度	2
1.3 小结	4
1.4 习题	5
第 2 章 线弹性断裂力学	6
2.1 断裂分析的能量方法	6
2.2 临界应变能释放率的确定	8
2.3 应力强度因子	9
2.4 材料的断裂韧度	17
2.5 应用权函数法计算应力强度因子	18
2.6 叠加原理在计算应力强度因子中的应用	20
2.7 确定应力强度因子的其他方法	23
2.8 线弹性材料的断裂判据	24
2.9 小结	25
2.10 习题	25
第 3 章 弹塑性断裂力学	27
3.1 裂纹尖端塑性区的形成	27
3.2 裂纹尖端的张开位移	30
3.3 J 积分	31
3.4 Dugdale - Barenblatt 带状屈服区模型	32
3.5 弹塑性材料的 J 积分起裂准则	35
3.6 HRR 场	35
3.7 J 阻力曲线	36
3.8 关于 J 积分的讨论	37
3.9 断裂过程区	38
3.10 小结	39
3.11 习题	40

第 4 章 裂纹扩展和止裂	41
4.1 裂纹扩展	41
4.2 循环荷载裂纹扩展	41
4.3 等幅交变荷载下的裂纹扩展寿命	42
4.4 变幅交变荷载下的裂纹扩展寿命	44
4.5 环境因素和应力腐蚀开裂	46
4.6 单调加载下的止裂措施	48
4.7 小结	50
4.8 习题	50
第 5 章 断裂韧度的实验和分析	52
5.1 常规韧度测试简介	52
5.2 断裂韧度的测试	52
5.3 阻力曲线 $K_R-\Delta a$ 的测试	53
5.4 J 积分的实验量测	55
5.5 阻力曲线方法测量 J 积分	57
5.6 CVN 夏比冲击实验	57
5.7 DWTT 落锤撕裂实验	59
5.8 关于 CVN 与 DWTT 实验的讨论	60
5.9 双试件 DWTT 法测定 $(CTOA)_c$	62
5.10 影响断裂韧度与阻力曲线 $K_R-\Delta a$ 的因素	63
5.11 小结	67
5.12 习题	68
第 6 章 动态裂纹扩展	69
6.1 断裂动力学问题	69
6.2 线弹性动态断裂理论概述	69
6.3 动态裂纹扩展条件	71
6.4 失稳断裂的裂纹扩展率	71
6.5 裂纹驱动力计算	73
6.6 裂纹稳态扩展分析	75
6.7 动态裂纹的止裂	76
6.8 小结	77
6.9 习题	77
第 7 章 断裂力学中的若干高等问题	78
7.1 复合型断裂判据	78
7.2 板壳应力强度因子	83

7.3 断裂的原子论模型	85
7.4 小结	87
7.5 习题	87
第 8 章 断裂力学在工程中的若干应用	88
8.1 结构安全评定	88
8.2 压力管道的裂纹快速扩展和止裂问题	90
8.3 核反应堆管道的 LBB 问题	93
8.4 工程构件的疲劳裂纹扩展寿命预报	94
8.5 小结	95
8.6 习题	96
第 9 章 损伤力学概述	97
9.1 引言	97
9.2 损伤变量	98
9.3 损伤测量	101
9.4 损伤本构方程	101
9.5 损伤演化方程	106
9.6 小结	107
9.7 习题	107
第 10 章 含损伤断裂力学的若干问题	109
10.1 以损伤力学为基础的疲劳寿命预测	109
10.2 疲劳裂纹扩展速率的损伤力学研究	111
10.3 板试件复合型疲劳裂纹形成与扩展	115
10.4 含孔洞材料的累积损伤评估	117
10.5 小结	120
10.6 习题	122
附录	123
附录 A Westergaard 应力函数法	123
A.1 线弹性力学的平面问题和反平面剪切问题	123
A.2 复变应力函数	126
A.3 Westergaard 应力函数	128
A.4 基本裂纹问题	130
习题 A	133
附录 B J 积分	135
B.1 J 积分的物理意义	135

B.2 J 积分的线路无关性	139
B.3 J 积分的能量解释	142
B.4 J 积分的起裂判据	144
B.5 J 积分与 CTOD 的关系	145
习题 B	146
参考文献	147

第 1 章 工程断裂问题与材料断裂韧性

1.1 工程断裂问题

20 世纪 80 年代末期,我国东北某大型钢铁企业的一座高炉煤气管道发生开裂事故。几十米长的管道架于 30 多米的高处,由于管道内部高压产生的环向应力和大跨度自重作用引起的纵向应力使管道中部下面管壁处于双向高拉应力区,加之常年的粉尘冲刷又使管壁内部变薄,终于酿成管道开裂的煤气泄漏事故。若不是及时发现并采取了补强措施,将会发生火灾和人员伤亡的灾难性后果。

工程断裂是危险性和破坏性较大的事故。飞机机身和船体开裂,天然气和其他压力管道的裂纹扩展,铁轨疲劳断裂,压力容器发生破裂等事故屡有发生。如 20 世纪 50 年代连续发生的彗星号客机失事,20 世纪 70 年代以来军用和民航飞机的多次坠毁,20 世纪 80 年代天然气管道和压力容器的裂纹扩展,20 世纪 90 年代的高速列车出轨事故。据美国和欧共体的权威专业机构统计:世界上由于机件、构件及电子元件的断裂、疲劳、腐蚀、磨损破坏造成的经济损失高达各国国民生产总值的 6%~8%。据我国劳动部统计,我国在 20 世纪 80 年代发生的锅炉和压力容器的爆炸事故约 5000 起,人员累计伤亡近万人,居国内劳动安全事故的第二位。因此,开展断裂力学的研究意义重大,将会防范上述的破坏行为,降低由断裂和破坏造成的经济损失,显著减少事故的发生。

30 年来,随着断裂力学理论和实验的不断发展,使得结构从传统的强度、刚度和稳定的分析及设计发展到可以进行断裂和损伤的分析及设计,使得许多过去仅能定性分析的问题达到定量的计算。如结构带有裂纹时,判断结构发生断裂的时机,不能再使用屈服判据,而应该寻求新的断裂判据,由断裂力学的分析给出答案。这是力学理论和实验为结构分析和设计带来的进步。线弹性和弹塑性断裂力学发展很快,目前的理论部分已经相当成熟;断裂动力学的研究也不断深入。而在工程方面,断裂力学已广泛应用于航天、航空、航海、兵器、机械、化工、土木、能源、交通、地质和微电子等许多领域。

为了解决工程上所面临的断裂问题,需要分析含裂纹的受力构件。断裂的发生绝大多数源于裂纹的扩展,而裂纹的失稳扩展,通常由裂纹端点开始。裂纹端点区应力应变场强度的大小是裂纹能否扩展的决定因素,因此需要找到一个能够

表征裂纹端点区应力应变场强度的参量。对于不含裂纹的构件，当某处的应力水平达到材料的屈服强度，就要发生塑性变形；而对于含裂纹的构件，当某裂纹端点处表征应力应变场强度的参量达到临界值，就要发生裂纹扩展，从而导致构件发生断裂。这个临界值是一个用以表征材料抵抗断裂性能的材料常数。如何找到这个值，又如何对它进行定义，将在下面的讨论中给出。

1.2 材料断裂韧度

从材料强度的角度来分析结构，首先要确定荷载和结构中最大应力之间的关系，然后将最大应力与材料强度进行比较。在考虑了安全系数之后，如果前者小于、等于后者，则认为结构是安全的。例如图 1-1a 所示的四点弯曲矩形截面简支梁受到一对对称竖向力 F 作用，梁中部为纯弯曲状态，该段梁截面下边缘处的最大拉应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{6FL_1}{bh^2} \quad (1-1)$$

式中， h 和 b 分别为梁截面的高度和宽度。

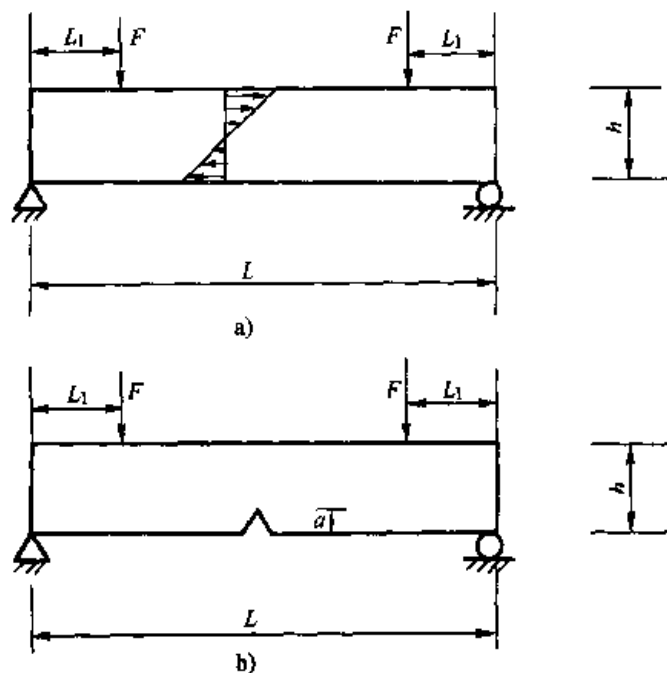


图 1-1 材料强度和断裂力学方法计算比较

a) 无裂纹的简支梁及其应力分布 b) 含裂纹的简支梁

显然，应力是荷载和梁截面几何形状的函数。我们首先假设当应力 $\sigma_{\max}$ 达到屈服点 σ_s 时，梁将发生显著塑性变形。对于固定的截面形状，只有当 F 小于一

定值时, 式 (1-1) 的右端才能够小于 σ_s 。此外, 若考虑到安全系数 N , 将要求 $\sigma_{\max}$ 小于 σ_s/N , 即当

$$F \leq \frac{bh^2}{6NL_1} \sigma_s \quad (1-2)$$

那么从材料强度的角度考虑问题, 结构是安全的。

按断裂力学的分析方法, 如果该梁在最大拉应力的位置存在一道铅垂裂纹, 这时的几何构形为图 1-1b 所示含裂纹的简支梁。可以用应力强度因子 (stress intensity factor) K (线弹性分析) 作为评估含裂纹结构的力学参量。对于相对小的裂纹, K 的表达式为

$$K = 1.12 \sigma_{\max} \sqrt{\pi a} \quad (1-3)$$

式中, a 为裂纹深度; $\sigma_{\max}$ 为裂纹尖端附近区域的应力, 由式 (1-1) 确定。

从断裂力学的原理分析, K 的临界值 K_{IC} 为材料的断裂韧度。如果由含裂纹结构计算得到的 K 值等于 K_{IC} , 裂纹可能扩展, 结构是不安全的; 如果 K 值小于 K_{IC} , 可以止裂, 结构是安全的。如果考虑到安全系数 N , 将式 (1-1) 代替式 (1-3) 中的 $\sigma_{\max}$, 则有

$$F \leq \frac{bh^2}{6NL_1} \frac{K_{IC}}{1.12 \sqrt{\pi a}} \quad (1-4)$$

此式是以断裂力学的观点所确定的结构的安全荷载。尽管式 (1-2) 和式 (1-4) 所给出的值都是结构安全荷载 F , 却分别基于无裂纹常规固体力学和断裂力学的理论。断裂力学引进了新的物理量, 考虑了裂纹的实际深度, 在新的研究层次上分析结构的物理现象。

断裂力学首先假设裂纹存在。从含裂纹物体的荷载-变形关系分析, 脆性断裂时的荷载与变形呈线性关系 (见图 1-2a), 在接近最大荷载时才有很小一段非线性关系。脆性断裂的发生是比较突然的, 即裂纹开始扩展的起裂点与裂纹失稳扩展的断裂点非常接近。裂纹扩展后, 荷载即迅速下降, 断裂过程很快就结束了。线弹性断裂力学 (linear elastic fracture mechanics) 能解决图 1-2a 所示的脆性断裂问题。而延性断裂时的荷载与变形呈非线性关系 (见图 1-2b), 起裂后, 裂纹可以缓慢地扩展一段时间, 然后或者失稳扩展, 或者止裂。弹塑性断裂力学 (elastic-plastic fracture mechanics) 能够解决图 1-2b 所示的延性断裂问题。

韧度 (toughness) 是指材料在断裂时通过原子而分离和诱发周围区域的弹塑性变形中吸收能量的能力。我们按照材料承受断裂的特点和能力将其划分为脆性 (brittle) 和延性 (ductile) 材料。它们是指材料韧度的相对低和高而言的。韧度高的材料比较不容易断裂, 在断裂前往往存在大量的塑性变形, 如低碳钢。但是,

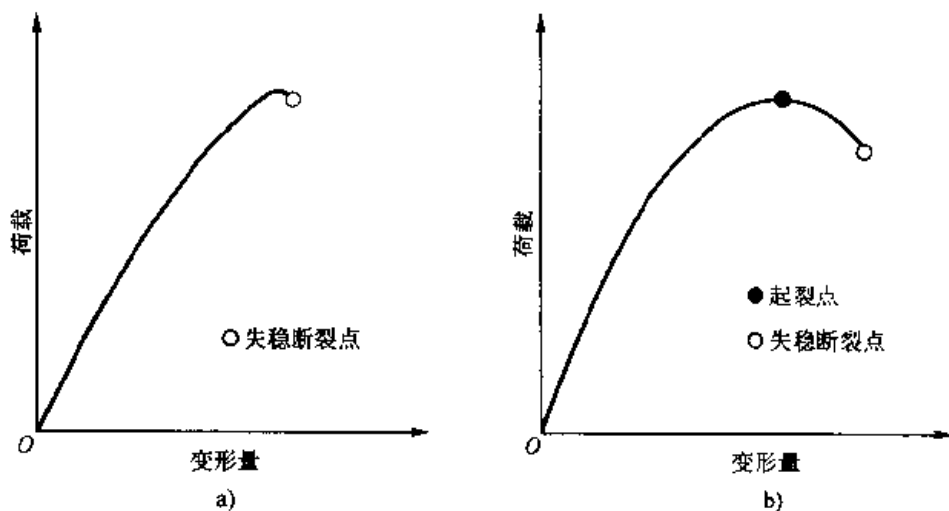


图 1-2 断裂时的荷载-变形关系

a) 脆性断裂 b) 延性断裂

塑性变形大的材料并不一定都有很高的韧度，如强度很低的金和银等软金属。玻璃和铸铁则是脆性材料，具有非常低的韧度，断裂前几乎没有变形。

1.3 小结

本章介绍了断裂力学的工程背景、应力强度因子和材料断裂韧度。举例说明了变形体力学与断裂力学的异同，它们的相同之处是要确定满足结构使用要求的临界荷载，而不同之处是前者从强度、刚度和稳定的观点讨论问题；后者是对含裂纹结构从裂纹扩展到止裂的观点考虑问题。因此，所确定的临界荷载不同。后者是比前者评定级别更高和条件更苛刻的标准。例如，式 (1-2) 和式 (1-4) 所给出的值都是结构安全荷载 F ，但是却分别基于常规固体力学和断裂力学的理论。断裂力学引进了新的物理量，考虑了裂纹的实际深度，在新的研究层次上分析结构的物理现象。

断裂力学是固体力学研究领域在目前最为活跃的重要分支之一，断裂不仅是力学问题，也与物理学、材料科学和工程应用等问题密切相关。对土木和机械结构的强度、刚度和稳定性的研究导致了变形体力学的产生，奠定了机器大工业时代的工程科学基础。对航空、航海、机械、土木、能源和电子等工程结构的断裂研究导致了断裂力学的诞生，使近代破坏力学初具雏形。断裂力学在材料力学、结构力学和弹塑性力学的基础上，研究含裂纹固体力学过程及其终止，是起源于 20 世纪初期，发展于 20 世纪后期，并且仍在不断发展和完善的一门科学，因此，它是具有前沿性和挑战性的研究领域。

1.4 习题

- 1-1 举例叙述如何应用变形体力学和断裂力学进行结构分析。
- 1-2 举例说明脆性材料和延性材料。
- 1-3 叙述脆性断裂和延性断裂的特点。

第 2 章 线弹性断裂力学

2.1 断裂分析的能量方法

在 20 世纪 20 年代, 英国物理学家 Griffith 从事了断裂力学的开拓性研究。他的基本观点是在裂纹扩展过程中, 由于物体内部能量的释放所产生的裂纹驱动力导致了裂纹的增长。同时, 也存在着阻止形成新的裂纹面积的阻力, 即在裂纹增长过程中, 物体中驱动裂纹增长的动力与阻止裂纹增长的阻力是平衡的。这一能量平衡方法成为材料和力学科学发展史上最著名的贡献之一。下面将简单介绍这一方法。

材料在单向应力作用下, 应变比能为

$$v_{\epsilon} = \frac{1}{V} \int F dx = \int \frac{F dx}{A l} = \int \sigma d\epsilon \quad (2-1)$$

式中, V 为体积; F 为力; A 和 l 分别为截面积和长度。

对于线弹性材料 ($\sigma = E\epsilon$), 则应变比能为

$$v_{\epsilon} = \frac{E\epsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (2-2)$$

如图 2-1 所示, 当裂纹长度增长至 a 时, 在裂纹的两侧形成了自由表面, 由于卸载导致了应变能的释放。比较裂纹扩展前后的总应变能就可以得到能量释放率 (energy release rate) 或称为裂纹驱动力 (crack driving force)。而在 Griffith 时代, 要进行这样的计算并不容易, 他所能解决的算例是受到单向均匀拉伸的无限大平板, 带有穿透板厚的中心裂纹问题。他利用 Inglis 的无限大平板带有椭圆孔的弹性解析解, 令椭圆的短轴趋近于零, 单向均匀拉伸应力的方向与椭圆的长轴垂直, 得到了单位厚度板的总应变能释放量为

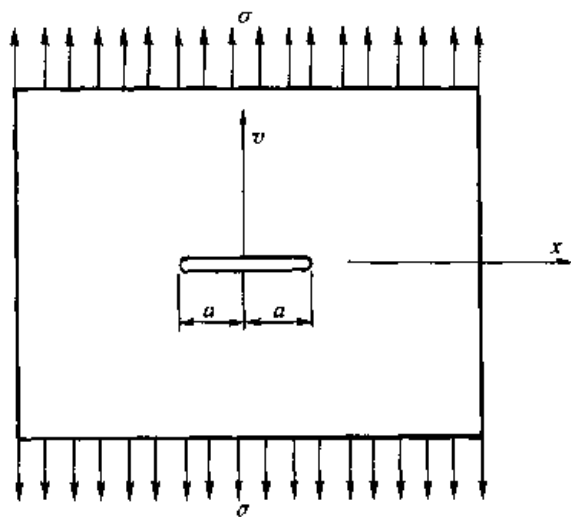


图 2-1 含中心裂纹的板

$$V_{\epsilon} = -\frac{\sigma^2}{2E}\pi a^2 \quad (2-3)$$

应变能是由裂纹扩展释放出来的，而在形成裂纹的过程中，材料内部的结合键将发生断裂，所引起的能量被材料吸收，产生了与裂纹扩展长度 a 相关联的表面能

$$E_S = 2\gamma a \quad (2-4)$$

式中， γ 为单位面积表面能，单位为 (J/m^2) ；系数 2 是因为形成了两个自由表面。

令总能量 $E_S + V_{\epsilon}$ 的导数为零，可得到临界裂纹长度值

$$\frac{\partial(E_S + V_{\epsilon})}{\partial a} = 2\gamma - \frac{\sigma_1^2}{E}\pi a = 0 \quad (2-5)$$

式中的 σ_1 表示该应力满足了裂纹扩展的必要条件，即裂纹尖端区释放的应变能等于形成裂纹面积所需的表面能。

求解上式得到

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}} \quad (2-6)$$

Griffith 早期的工作涉及的只是脆性材料，如玻璃等。当材料具有明显的塑性或延性性能时，仅考虑表面能便难以提供精确的断裂模型。于是，后人 Griffith 模型作了一些修正：对于延性材料，在断裂的过程中所释放的能量主要耗散在裂纹尖端附近材料的塑性流动中，满足这些能量耗散的应变能释放率称为临界应变能释放率 (critical strain energy release rate)，用 G_C 表示，于是，式 (2-6) 改写为

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{EG_C}{\pi a}} \quad (2-7)$$

这一表达式中包含了影响断裂过程的 3 个重要因素：材料性能、应力水平和裂纹尺度。对于无限大板，临界裂纹长度并不取决于包含裂纹的结构尺寸，而是一个绝对数值。每当裂纹向前扩展一个小的增量，在裂纹附近的卸载区，材料将释放部分应变能。由图 2-2 可见，当裂纹从三角形区域 1 扩展到 2 时，部分的应变能被释放，在裂纹后面的三角形区域内应力可视为零，而裂尖前部的材料仍然可以继续承担荷载。

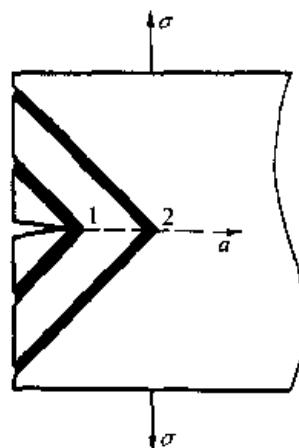


图 2-2 当裂纹从三角形区域 1 扩展到 2 时，部分的应变能被释放

【例 2-1】 铝合金圆柱形管道的 $G_C = 20\text{N}/\text{mm}$ ， $E = 76\text{GPa}$ ，由于管道内

压力引起的环向应力为 300MPa, 求在此应力的作用下, 裂纹的可能扩展长度。

解: 应用式 (2-7) 有

$$a = \frac{G_c E}{\pi \sigma^2} = \frac{20 \times 76 \times 10^3}{\pi \times 300^2} \text{mm} = 5.4 \text{mm}$$

显然, 裂纹在扩展至这一长度之前可以被检测到。由此看出, 防止初始裂纹的产生, 避免裂纹的扩展是极其重要的。

在例 2-1 中, 没有给出引起管道环向应力的内压力是液体还是气体。如果是气体, 由于其可压缩性, 其潜在的危害还要加重, 裂纹扩展的长度还要长。关于这方面的讨论见本书的第 8 章。

2.2 临界应变能释放率的确定

确定临界应变能释放率 G_c 的方法不限于一种, 其中一种称为柔度法 (compliance method)。变形与荷载的比值为柔度, 即 $c = \frac{\delta}{F}$ 。总应变能可以表示为柔度 c 的形式

$$V_\epsilon = \frac{1}{2} F \delta = \frac{1}{2} c F^2 \quad (2-8)$$

例如, 双悬臂梁试件的柔度, 可以作为裂纹在试件上扩展长度 a 的函数, 它可从试验中量测。应变能释放率可以由应变能对裂纹长度的导数求得

$$G_c = \frac{\partial V_\epsilon}{\partial a} = \frac{1}{2} F^2 \frac{\partial c}{\partial a} \quad (2-9)$$

上述结果都是由单位厚度试样得到的。当外荷载达到临界值 $F = F_{cr}$ (F_{cr} 为裂纹扩展至一定长度 a_{cr} 时, 所需施加的临界荷载), 对于厚度为 b 的试件, 其裂纹驱动力的临界值 G_{cr} 表示为

$$G_{cr} = \frac{1}{2} \frac{F_{cr}^2}{b} \frac{\partial c}{\partial a} \quad (2-10)$$

以图 2-3 所示的矩形截面 (厚度和高度分别为 b 和 $2h$) 双悬臂梁试件为例, 由小变形挠曲线的微分方程, 梁在自由端的挠度值为

$$\frac{\delta}{2} = \frac{F a^3}{3EI}$$

其中, $I = \frac{bh^3}{12}$, 梁的柔度为

$$c = \frac{\delta}{F} = \frac{2a^3}{3EI}$$

由式 (2-10) 可以得到临界应变能释放率为

$$G_{cr} = \frac{1}{2} \frac{F_{cr}^2}{b} \frac{2a_{cr}^2}{EI} = \frac{12F_{cr}^2 a_{cr}^2}{Eb^2 h^3} \quad (2-11)$$

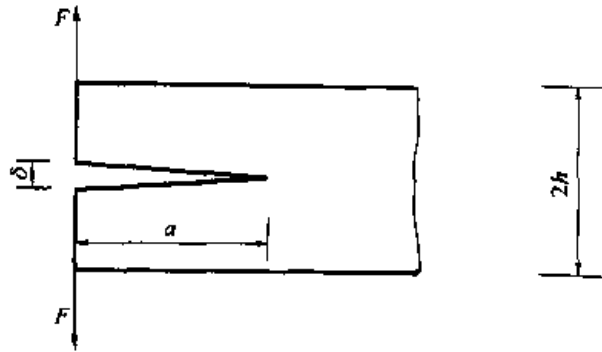


图 2-3 双悬臂梁的断裂试件

2.3 应力强度因子

2.3.1 裂纹的基本类型

固体的断裂几乎总是由于物体中出现某些位移间断面而引起的。一般将裂纹问题划分为 3 种基本类型：类型 I 为张开型 (opening mode)，其裂纹表面位移彼此相反，方向均垂直于裂纹的扩展方向，这是工程上常见的裂纹形式；类型 II 为滑开型 (sliding mode)，裂纹上下表面位移也彼此相反，一个沿着裂纹扩展方向，另一个背离扩展方向；类型 III 为撕开型 (anti-plane shear mode)，裂纹上下表面产生方向相反的离面位移，如图 2-4 所示。

在断裂的过程中，裂纹尖端处要释放出一定的能量。因此，裂纹尖端附近的应力场和应变场必然与此裂纹尖端处的能量释放率有关，如 2.1 节所述。若裂纹尖端附近应力—应变场的强度足够大，断裂即可发生，反之不发生断裂。因此，必须寻求裂纹尖端附近应力—应变场的解答。近代断裂力学是用弹性力学的解析方法得到了这些解答。

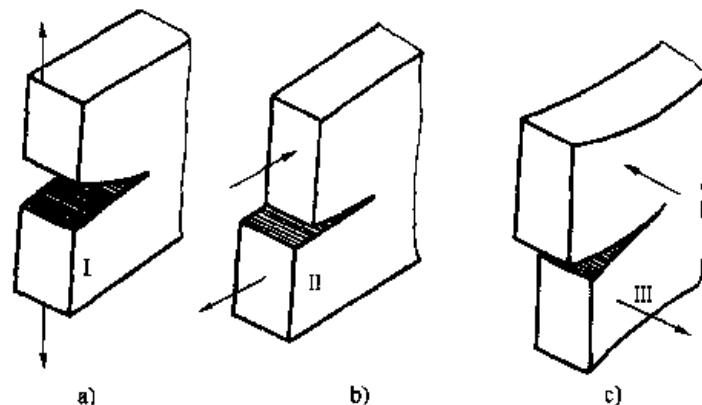


图 2-4 断裂模型

a) 张开型 b) 滑开型 c) 撕开型

2.3.2 二维 I 型裂纹

二维的 I 型裂纹问题, 如图 2-5 给出一个以裂纹端点为原点的坐标系。x 方向是裂纹扩展方向, y 方向是裂纹面的法线方向, z 方向则是离面的方向。考虑一个离裂纹端很近、位置在极坐标 (r, θ) 的平面问题的应力单元, 由 Westergaard 应力函数法给出裂纹尖端区域应力场的解析解为 (证明见附录 A)

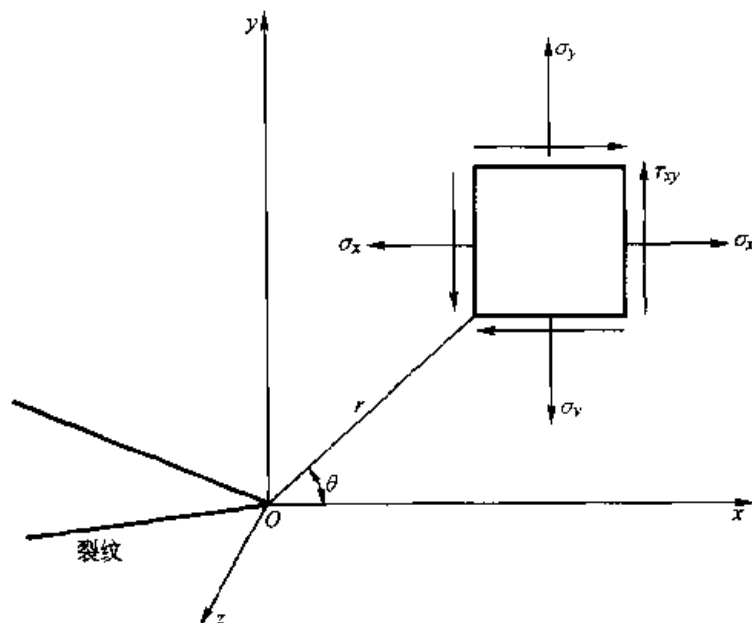


图 2-5 平面问题的应力单元

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \dots \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \dots \\ \tau_{yx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \dots\end{aligned}\quad (2-12)$$

式中, K_I 称为应力强度因子 (stress intensity factor), 它是衡量裂纹尖端区应力场强度的重要参量, 下标 I 表示为 I 型 (张开型) 裂纹。类似地, 可以推导出 II 型和 III 型裂纹的 K_{II} 和 K_{III} 。在裂纹尖端区, 即 r 足够小的情形下, 式 (2-12) 中 r 的高次项比首项小得多, 因而可以忽略。当裂纹尖端区应力场的形式恒定时, 其强度完全由应力强度因子的大小来确定。由于材料为线弹性, 裂纹尖端区的应变场和位移场可以由弹性力学公式得到。这里, 需要注意到当 $r \rightarrow 0$ 时, 即在裂纹端点, 应力分量都会趋于无穷大。这种特性称为应力奇异性 (stress singularity), 产生的原因是因为裂纹端点是几何上的不连续点。

由于 3 种基本裂纹类型裂纹尖端区的应力、应变、位移和应变能密度都可以

由应力强度因子来决定, 因此应力强度因子可以作为表征裂端应力-应变场强度的重要参量。现代断裂力学, 得益于 Irwin 在 20 世纪 50 年代提出了应力强度因子的概念, 将早期由 Griffith 开创的断裂力学发展而形成了线弹性断裂力学的构架。

在工程应用时, 要计算应力强度因子。其计算方法主要有解析法和数值法两种, 前者包括应力函数法和积分变换法等, 后者包括有限元法和有限体积法等, 这些都需要较为高级的数学和力学手段, 以及复杂的数值计算。为了便于工程应用, 根据不同的裂纹形式、加载方式和几何尺寸, 文献或手册中给出了大量的应力强度因子的表达形式, 它的量纲是 $[\text{力}][\text{长度}]^{-\frac{3}{2}}$, 表 2-1 列出了几种常见的 I 型裂纹应力强度因子。

表 2-1 几种常见的 I 型裂纹应力强度因子

序号	裂纹类型	应力强度因子 K_I
1	无限大平板有长度 $2a$ 的中心裂纹, 受到无穷远处的单向均匀拉伸 (见附录 A 图 A-4)	$\sigma \sqrt{\pi a}$
2	无限大平板有长度 $2a$ 的中心裂纹, 裂纹表面受到均匀压缩应力作用	$\sigma \sqrt{\pi a}$
3	无限大平板有长度 $2a$ 的中心裂纹, 裂纹表面右侧离裂纹中心 b 处受到一对集中压力 F 作用 (见附录 A 图 A-5)	$K_{\text{右}} = \frac{F}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ $K_{\text{左}} = \frac{F}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$
4	半无限大板有长度 a 的单边裂纹	$1.12\sigma \sqrt{\pi a}$
5	无限体中有半径为 a 的圆裂纹	$2\sigma \sqrt{\frac{a}{\pi}}$
6	在宽度为 b 的板条中心有长度 $2a$ 的裂纹	$\sigma \sqrt{b \tan\left(\frac{\pi a}{b}\right)}$
7	在宽度为 b 的板上有两个长度各为 a 的对称裂纹	$\sigma \sqrt{b \tan\left(\frac{\pi a}{b}\right) + 0.1 \sin\left(\frac{2\pi a}{b}\right)}$
8	几何对称与受力对称的含孔边裂纹有限大矩形板 (见图 2-6a)	$K_I = \bar{k}_I \sigma \sqrt{\pi a}$

在表 2-1 中的情况 1~7, 给出了二维无限大和半无限大板中常见 I 型裂纹的应力强度因子。对于二维有限大板含孔边裂纹的应力强度因子, 可以由数值结果给出。图 2-6a 表示几何对称与受力对称的含孔边裂纹有限大矩形板。对于各

向同性材料, 各种高宽比条件下, 含孔边对称裂纹有限大板应力强度因子 K_I (I 型) 的公式为

$$K_I = \bar{k}_I \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2-13)$$

式中因数 $\bar{k}_I$ 为大于或等于 1 的值, 其具体数值解答请见参考文献 [7] 第 5 章。该表达式列在表 2-1 的第 8 行中。当 $a \ll b$ 时, 则 $\bar{k}_I$ 趋于 1, 即为表 2-1 中的情况 1 或者 2, 应力强度因子的表达式与含中心裂纹无限大板的情况接近。

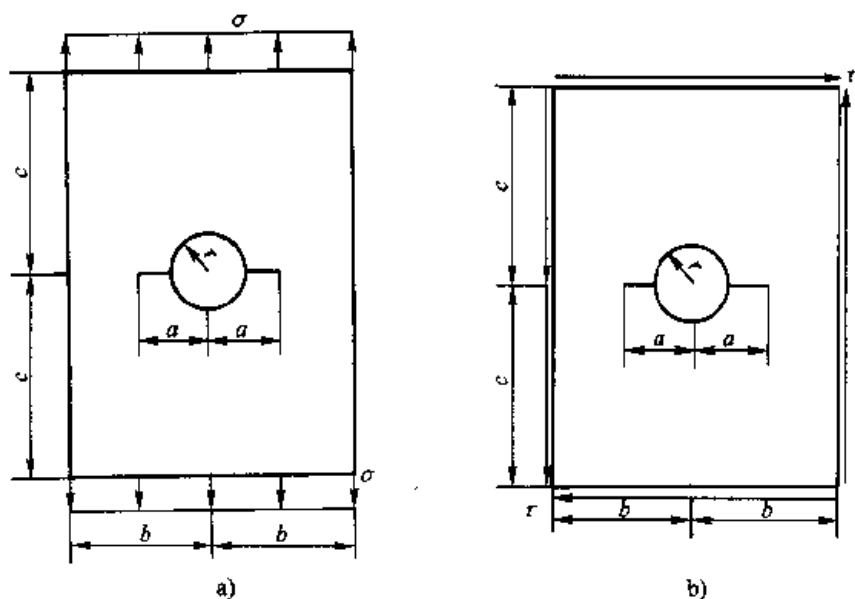


图 2-6 几何对称的含孔边裂纹有限大矩形板

a) 对称受力 b) 反对称受力

图 2-6b 表示几何对称而受力反对称的含孔边裂纹矩形板, 含孔边对称裂纹有限大板应力强度因子 K_{II} , 即平面剪切 II 型裂纹的公式为

$$K_{II} = \bar{k}_{II} \tau \sqrt{\pi a} \quad (2-14)$$

式中, 因数 $\bar{k}_{II}$ 为大于或等于 1 的值, 其具体数值解答请见参考文献 [7] 中第 5 章。

2.3.3 二维 I 型裂纹和 II 型裂纹

对于图 2-5 中平面问题的应力单元, 类似关于 I 型裂纹的推导, 可以给出平面剪切型 (II 型) 裂纹的应力强度因子 K_{II} 。裂纹尖端附近的应力场为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{yx} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (2-15)$$

另外, 还可以给出反平面剪切型 (Ⅲ型) 裂纹的应力强度因子 K_{III} 。裂纹尖端附近的应力场为

$$\begin{aligned}\tau_{zy} &= \frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \tau_{zx} &= -\frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}\end{aligned}\quad (2-16)$$

式中

$$K_{\text{III}} = S_y \sqrt{\pi a}$$

它取决于反对称面荷载 S_y 与裂纹半长 a 。

2.3.4 关于应力强度因子的讨论

从以上三种类型裂纹的应力强度因子的表达式中, 可见在裂纹尖端附近, 应力场具有 $r^{-1/2}$ 的奇异性。只要存在荷载, 应力就趋于无穷大。按照传统的强度观点, 任何材料都不能够承受如此之大的应力, 其结构都注定要破坏。然而, 事实并非如此, 只有当荷载达到某一数值时, 裂纹才会扩展, 导致结构丧失承载能力。这说明采用应力作为控制参数所建立的强度判据, 已经不能反映含裂纹构件的实际承载能力。因此, 必须选择新的控制参数并建立新的强度判据。

当应力强度因子已知时, 即可确定裂纹尖端附近任意点 (坐标 (r, θ)) 的应力状态。对于 I 型裂纹, 裂纹尖端附近应力状态关于裂纹及其延长线是对称的, 在该延长线上只有正应力, 而切应力为零; 对于 II 型裂纹, 裂纹尖端附近的正应力 (σ_x, σ_y) 是关于 θ 的奇函数, 切应力是关于 θ 的偶函数, 因此, 裂纹尖端附近应力状态关于裂纹及其延长线是反对称的, 在该延长线上只有切应力, 而正应力为零。

总之, 应力强度因子是判定裂纹尖端附近整个应力场强度的物理量, 线弹性断裂力学的主要任务就是确定含裂纹构件的应力强度因子。

2.3.5 均匀受载含中心裂纹无限大板的裂纹尖端附近位移场

考察裂纹尖端附近的位移场, 我们仍然采用以裂纹尖端为原点的局部极坐标 (r, θ) , 如图 2-7 所示。考虑到 I 型和 II 型裂纹, 给出均匀受载含中心裂纹无限大板的裂纹尖端附近位移场的表达式

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{K_{\text{I}}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{\text{II}}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 + 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ u_y &= \frac{K_{\text{I}}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - \frac{K_{\text{II}}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right)\end{aligned}\quad (2-17)$$

式中

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{平面应力} \\ 3-4\nu & \text{平面应变} \end{cases}$$

对于Ⅰ型裂纹的位移, 令上式中 $K_{\text{II}} = 0$, u_x 是 θ 的偶函数, u_y 是 θ 的奇函数; 对于Ⅱ型裂纹的位移, 令上式中 $K_{\text{I}} = 0$, u_x 是 θ 的奇函数, u_y 是 θ 的偶函数。两者在裂纹尖端附近共轭点的位移示于图 2-7 中, 可见Ⅰ型位移对称于裂纹及其延长线; Ⅱ型位移反对称于裂纹及其延长线。在裂纹上下表面上, 对于Ⅰ型问题仅有张开位移 u_y , 即

$$u_y = \pm \frac{K_{\text{I}}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + 1) \quad (2-18)$$

可见 u_y 呈抛物线型分布, 如图 2-7 所示。Ⅰ型位移垂直于裂纹, 呈平面张开型。在裂纹上下表面上, 对于Ⅱ型问题仅有前后移动 u_x , 即

$$u_x = \pm \frac{K_{\text{II}}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + 1) \quad (2-19)$$

可见 u_x 分布也是呈抛物线型。Ⅱ型位移平行于裂纹, 呈平面剪切型。

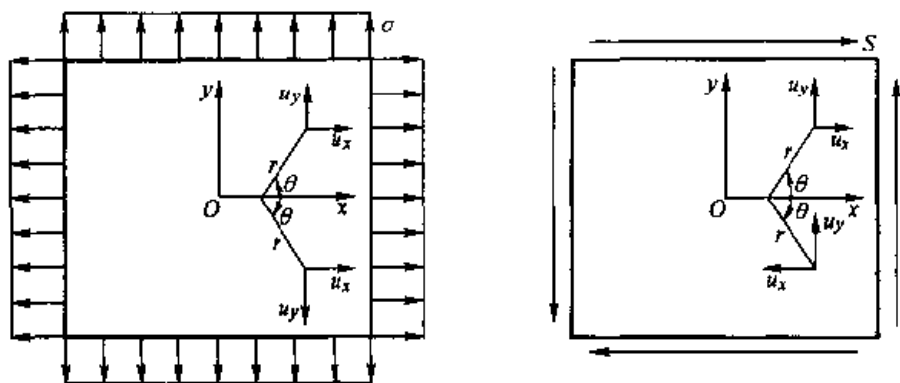


图 2-7 均匀受载含中心裂纹无限大板的裂纹尖端附近位移

对于Ⅲ型裂纹, 含中心裂纹无限大板的裂纹尖端附近位移场的表达式为

$$u_z = \frac{1}{\mu} K_{\text{III}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} r \sin \frac{\theta}{2} \quad (2-20)$$

可见, 离面位移 u_z 是 θ 的奇函数, Ⅲ型位移反对称于裂纹及其延长线。

2.3.6 有限大体含椭圆裂纹受任意拉力的应力强度因子

前面几节讨论了求解二维平面裂纹的应力强度因子, 本节将给出图 2-8 所示含椭圆裂纹或者表面半椭圆裂纹的三维有限大体的应力强度因子。

首先建立应力强度因子 K_{I} 与裂纹张开位移 u 的关系。将裂纹张开位移的平

方写成如下形式

$$u^2(x, z) = u_0^2 H(x, z) \quad (2-21)$$

式中, $H(x, z)$ 是假定的已知函数, 满足 $H(0, 0) = 1$ 和 $H(x_1, z_1) = 0$; u_0 是位移场的待定幅值。如图 2-8a 所示, 这里 (x, z) 是裂纹表面上的任意点, (x_1, z_1) 是裂纹前缘上的任意点。在裂纹前缘上的任意点 $A(x_1, z_1)$ 附近, 应用泰勒级数展开式 (2-21), 略去高阶小量, 并应用 H 函数满足条件, 可得法向切片裂纹张开位移的平方如下

$$u^2(x, z) = u_0^2 \left\{ \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_1 \\ z=z_1}} (x - x_1) + \left. \frac{\partial H}{\partial z} \right|_{\substack{x=x_1 \\ z=z_1}} (z - z_1) \right\} \quad (2-22)$$

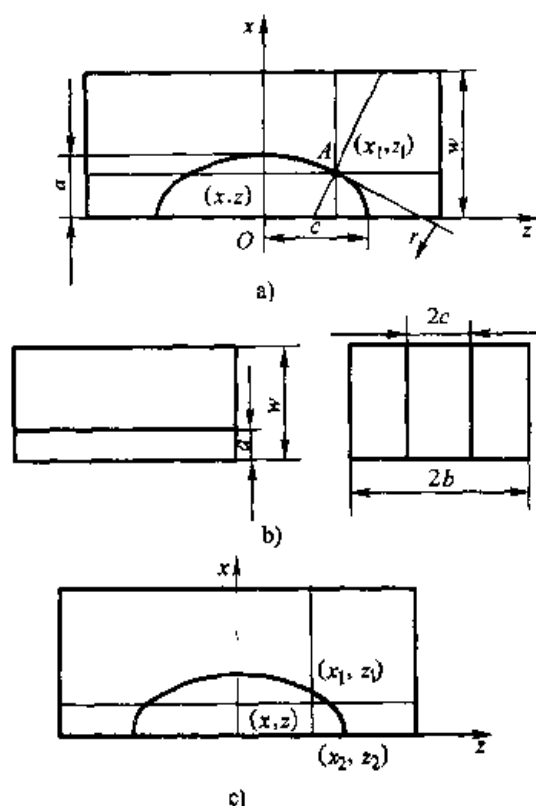


图 2-8 含椭圆裂纹或者表面半椭圆裂纹的三维有限大体

过点 $A(x_1, z_1)$ 作平行于 x 轴的横截面与平行于 z 轴的纵截面, 它们都垂直于 xz 平面。在点 A 的邻域中, 以上两种截面的裂纹张开位移分别为

$$u^2(x, z_1) = u_0^2 \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_1 \\ z=z_1}} (x - x_1) \quad (2-23)$$

$$u^2(x_1, z) = u_0^2 \frac{\partial H}{\partial z} \bigg|_{\substack{x=x_1 \\ z=z_1}} (z - z_1) \quad (2-24)$$

于是, 由式 (2-21) ~ 式 (2-24), 在裂纹前缘的 A 点附近, 法向切片裂纹张开位移的平方为

$$u^2(x, z) = u^2(x, z_1) + u^2(x_1, z) = u_0^2 \{ H(x, z_1) + H(x_1, z) \} \quad (2-25)$$

显然, 裂纹前缘任意点的位移为两个正交面上位移的矢量和。引入法向切片上距裂纹前缘为 r 的一点坐标为

$$x = x_1 - r \sin \varphi, \quad z = z_1 - r \cos \varphi \quad (2-26)$$

将式 (2-26) 代入式 (2-22), 可得在法向切片上裂纹张开位移为

$$u^2 = -u_0^2 r \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial H}{\partial z} \cos \varphi \right\} \bigg|_{\substack{x=x_1 \\ z=z_1}} \quad (2-27)$$

假定沿 y 方向的法向切片在裂纹前缘附近的裂纹张开位移与应力强度因子具有如下关系

$$u^2(x, z) = \frac{8 K_1^2}{\pi E_n^2} r \quad (2-28)$$

式中, E_n 称为广义弹性模量, 表示成

$$E_n = E + (E_1 - E) R(\varphi), \quad E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (2-29)$$

对于深埋裂纹, 法向切片处于平面应变状态, 可以取

$$R(\varphi) = 1, \quad E_n = E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (2-30)$$

对于表面裂纹, 法向切片从 $\varphi = 0$ 处平面应力状态过渡到 $\varphi = \pi/2$ 处平面应变状态。从而, 可以取

$$R(\varphi) = \sin \varphi, \quad E_n = E - (E_1 - E) \sin \varphi \quad (2-31)$$

由式 (2-27) 与式 (2-28), 可得法向切片的应力强度因子与裂纹张开位移的关系为

$$K_1^2 = -\frac{\pi}{8} E_n u_0^2 \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial H}{\partial z} \cos \varphi \right\} \bigg|_{\substack{x=x_1 \\ z=z_1}} \quad (2-32)$$

法向切片的总能量释放率为

$$G = \frac{1}{E_n} K_1^2 = -\frac{\pi}{8} E_n u_0^2 \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial H}{\partial z} \cos \varphi \right\} \bigg|_{\substack{x=x_1 \\ z=z_1}} \quad (2-33)$$

式 (2-33) 给出了能量释放率, 或者应力强度因子, 与广义弹性模量和裂纹张开位移之间的关系。本节分析了含椭圆裂纹或者表面半椭圆裂纹的三维有限

大体的应力强度因子，三维裂纹弹性体上某点的位移实质是由正交面上平面切片位移的矢量和给出。这也说明了二维问题的解答是分析三维问题的基础。

2.4 材料的断裂韧性

在 2.3 节介绍了应力强度因子的概念。应力强度因子的临界值 K_{IC} 称为材料的断裂韧性 (fracture toughness)，下脚标 I 表示为 I 型裂纹。参考表 2-1，裂纹长度 a 、材料断裂韧性 K_{IC} 与裂纹端点正前方能够使裂纹面张开的拉伸应力 σ_I 之间的关系可以表示为

$$\sigma_I = \frac{K_{IC}}{\alpha \sqrt{\pi a}} \quad (2-34)$$

式中 α 为几何参数。例如，当取表 2-1 中的情况 1 时， $\alpha=1$ 。对于各种情况的 α 值，可以查表，也可以通过解析和数值计算得到。

在 2.1 节中介绍了能量释放的观点和 Griffith 的断裂判据。考虑裂纹扩展时满足能量耗散的应变能释放率式 (2-7)，注意到这里讨论的是 I 型裂纹，因此有

$$\sigma_I = \sqrt{\frac{EG_{IC}}{\pi a}} \quad (2-35)$$

式中， G_{IC} 是比较裂纹扩展前后的总应变能所得到的能量释放率或称为裂纹驱动力。

在断裂力学的研究中，关注能量释放率与应力强度因子之间的关系，因为前者是后者的基础，它们分别从能量和应力场的观点描述了裂纹的扩展或者止裂。若令式 (2-34) 中 $\alpha=1$ ，代入式 (2-35)，考虑到平面应变的 $E_I = E/(1-\nu^2)$ ，可得到平面应变下应力强度因子和能量释放率 G_{IC} 之间的关系

$$\frac{E}{1-\nu^2} G_{IC} = K_{IC}^2 \quad (2-36)$$

式中， E 为弹性模量； ν 为泊松比。

在断裂的过程中所释放的能量主要耗散在裂纹尖端附近材料的塑性流动中，对特定的材料，上述能量耗散过程中所需要的应变能释放率称为临界应变能释放率，用 G_{cr} 来表示，这样式 (2-34) 可重新记为

$$\sigma_I = \sqrt{\frac{EG_{cr}}{(1-\nu^2)\pi a}} \quad (2-37)$$

它体现了在断裂过程中所涉及的 3 个方面因素：材料、应力水平和裂纹尺度。

表 2-2 列出了各种典型材料的 G_{IC} 和 K_{IC} ，以及它们的弹性模量 E 。由于材料的性质不同，这些值也相差甚远，例如：某些聚合物的断裂韧性很高，而坚

硬的合金钢使裂纹不能任意扩展。

表 2-2 材料的断裂韧度

材 料	$G_{IC}/\text{kN}\cdot\text{m}^{-1}$	$K_{IC}/\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$	E/GPa
合金钢	107	150	210
铝合金	20	37	69
聚乙烯	20	—	0.15
低碳钢	12	50	210
橡胶	13	—	0.001
热固化增强玻璃	2	2.2	2.4
聚苯乙烯	0.4	1.1	3
木材	0.12	0.5	2.1
玻璃	0.007	0.7	70

【例 2-2】 承受内压的铝合金管状容器，直径 0.25m，壁厚 5mm，材料的屈服强度 330MPa，断裂韧度 $K_{IC}=41\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ，安全系数 0.75 和 $\alpha=1$ ，试确定安全使用压力和最大允许裂纹长度。

解：能使容器环向应力达到屈服强度的最大内压力为

$$p = \frac{0.75\sigma\delta}{r} = \frac{0.75 \times 330 \times 0.005}{0.25/2} \text{MPa} = 9.9 \text{MPa}$$

由式 (2-34)，最大允许裂纹长度为

$$a = \frac{K_{IC}^2}{\pi\sigma^2} = \frac{41^2}{\pi \times (0.75 \times 330)^2} \text{m} = 8.74 \text{mm}$$

当小于、等于这一裂纹长度时，可以对裂纹进行检测和修补；当大于这一长度时，裂纹可能迅速扩展。

2.5 应用权函数法计算应力强度因子

应力强度因子与裂纹几何和荷载形式有关，后两者的组合可以派生出许多种情况，从而使应力强度因子的求解变得很复杂。权函数法给出了解耦分析这二者影响的途径。针对任一裂纹几何，均可求出适用于该几何的权函数，而该裂纹几何在任意荷载下的应力强度因子和位移场都可以由该荷载经权函数加权积分获得。通过权函数法所得到的第一部应力强度因子手册由吴学仁和 Carlsson (1991) 给出。

应用权函数法计算应力强度因子的步骤如下：

$$u_y = \pm \frac{\sigma}{4\mu} (\kappa + 1) \sqrt{x(a-x)} \quad x \in (0,1)$$

用式 (2-17), 改写上式得到

$$u_y = \pm \frac{2\sigma}{E'} \sqrt{x(a-x)} \quad x \in (0,1)$$

将以上两式代入式 (2-38) 可得权函数为

$$\bar{w}_a = \pm \sqrt{\frac{x}{2\pi a(a-x)}} \quad x \in (0,1) \quad (2-41)$$

将式 (2-41) 取 + 号代入式 (2-39), 可得右端应力强度因子为

$$K = 2 \int_0^a t(x) \bar{w}_a dx = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \int_0^a t(x) \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx \quad (2-42)$$

对于裂纹面中点作用上下集中力 F 的特殊情况, 令 $t(x) = F\delta\left(x - \frac{a}{2}\right)$, 式中 δ 为 Kronecker 记号, 将其代入式 (2-42) 可得右端应力强度因子为

$$K = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} F \quad (2-43)$$

权函数方法实质上属于能量差率方法的范畴。这种方法的优点表现在, 如果对于固定结构几何形式已知某种荷载状态下的解答, 则可得到其他荷载状态下的闭合解。如果以上前提不成立, 这种方法就无能为力了。同时, 这种方法也不能求解三维问题。

2.6 叠加原理在计算应力强度因子中的应用

2.6.1 计算应力强度因子的叠加原理

对于经典的开裂结构, 在不同荷载作用下的应力强度因子表达式都有手册和图表可查。然而, 在工程结构的断裂力学分析中, 有时所需的应力强度因子往往较为复杂, 很难从现有的资料中查到。如果材料的本构关系是线弹性的, 可以采用叠加原理求得应力强度因子。

叠加法除了线弹性和小变形的限制外, 还要求裂纹面最终是张开的。常见的方法有荷载的分解和叠加。如图 2-11a 所示的双向应力作用下孔边裂纹的应力强度因子, 可以通过将双向应力分解为两个单向应力作用的叠加, 二者分别为图 2-11b 和图 2-11c 所示。于是有

$$K_I(a) = K_I(b) + K_I(c) \quad (2-44)$$

而 $K_I(b)$ 和 $K_I(c)$ 可以从现有的手册中查到。

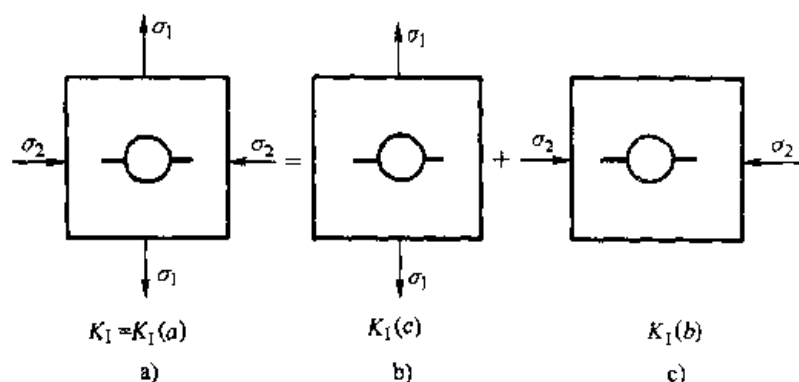


图 2-11 计算应力强度因子的叠加原理

以上是同型裂纹（I 型）应力强度因子的叠加。两个以上的外荷载同时作用于一个带裂纹的结构，若此时的裂纹问题与每个荷载单独作用时是同一型裂纹，则应力强度因子为每个荷载单独作用时的应力强度因子之和。如果结构在几种或者特殊荷载作用下，产生了复合型裂纹，则各型应力强度因子是在将荷载分解后各型裂纹问题的应力强度因子本身的叠加。

2.6.2 受均布荷载含中心裂纹无限大板

在表 2-1 中第 1 行，给出了无限大平板有长度 $2a$ 的中心裂纹，受到无穷远处单向均匀拉伸的应力强度因子，本节将应用能量释放率和叠加原理给出公式的证明。

如图 2-12a 所示的情况，可以视为由图 2-12b 和图 2-12c 两种情况的叠加，于是有

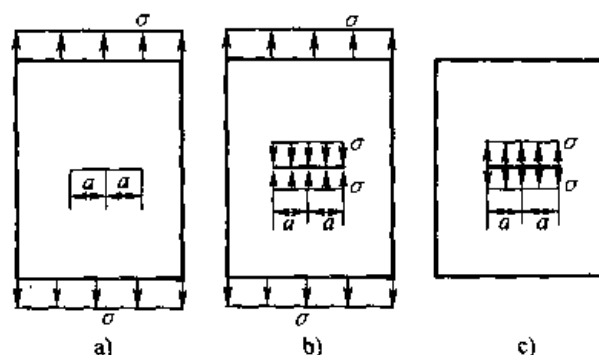
$$K_I(a) = K_I(b) + K_I(c)$$

显然，图 2-12b 等价于无裂纹的情形，故

$$K_I(b) = 0 \text{ 和 } K_I(a) = K_I(c)$$

进而，采用能量释放率方法确定 $K_I(c)$ 。

假定在图 2-12c 中，裂纹表面位移分量 u 具有椭圆型分布规律，即

图 2-12 无限大平板有长度 $2a$ 的中心裂纹

$$\left(\frac{u}{u_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1 \quad (2-45)$$

其中, u_0 是 $x=0$ 上的最大位移。它是一个待定参数, 如图 2-13 所示。

引入

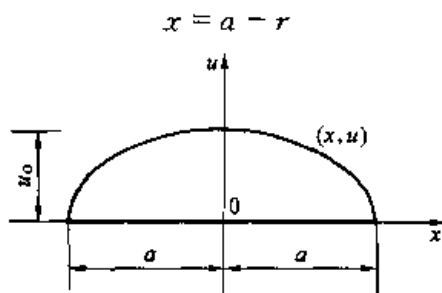


图 2-13 裂纹表面位移分量 u 具有椭圆型分布规律

式 (2-45) 可以写成如下形式

$$\left(\frac{u}{u_0}\right)^2 = 1 - \left(\frac{a-r}{a}\right)^2$$

在裂纹尖端附近, $r \ll a$, 保留一阶小量, 上式可以简化为

$$u = u_0 \sqrt{\frac{2r}{a}} \quad (2-46)$$

这表明, 在裂纹尖端附近的裂纹面上, 位移 u 呈抛物线型分布。

在平面应力情况下, 对于 I 型问题, 在裂纹尖端附近的裂纹面上, 位移可由式 (2-17) 表示如下

$$u = \frac{K_I}{2\mu}(\kappa+1)\sqrt{\frac{r}{2\pi}} = \frac{4}{E}\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{r} \quad (2-47)$$

比较式 (2-46) 和式 (2-47), 可知

$$K_I = \frac{E}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}u_0 \quad (2-48)$$

由式 (2-36), 对于平面应力情况, 可知

$$G = \frac{K_I^2}{E} = \frac{E\pi}{4a}u_0^2 \quad (2-49)$$

另一方面, 为了确定能量释放率 G , 给出图 2-12c 的总势能表达式

$$\Pi = U - U_r = 4 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^a \sigma h u dx - \int_0^a \sigma h u dx \right\} \quad (2-50)$$

h 为板厚, 将式 (2-46) 代入式 (2-50), 经积分可得

$$\Pi = -\frac{\pi}{2}\sigma h a u_0 \quad (2-51)$$

系统能量释放率为裂纹扩展单位面积所需要的势能, 即

$$G = -\frac{1}{2h} \frac{d\Pi}{da}$$

将式 (2-51) 代入上式, 可得

$$G = \frac{\pi}{4} \sigma \left(a \frac{du_0}{da} + u_0 \right) \quad (2-52)$$

比较式 (2-49) 与式 (2-52), 我们有

$$\frac{du_0}{da} + \frac{u_0}{a} = \frac{E}{\sigma a^2} u_0^2 \quad (2-53)$$

式 (2-53) 是关于 u_0 的一阶常系数非齐次伯努利方程, 其解为

$$u_0 = \frac{2\sigma a}{E + C_1 2\sigma a^2} \quad (2-54)$$

其中 C_1 是由边界条件确定的积分常数。

令式 (2-54) 右侧的分子和分母同时除以 a , 当 $a \rightarrow \infty$ 时, $u_0 \rightarrow 0$, 于是有 $C_1 = 0$, 从而得到

$$u_0 = \frac{2\sigma a}{E} \quad (2-55)$$

最后, 将式 (2-55) 代入式 (2-49), 可得

$$K_I(c) = \sigma \sqrt{\pi a}$$

从而

$$K_I = K_I(a) = K_I(c) = \sigma \sqrt{\pi a}$$

这样, 表 2-1 中第 1 行的公式得到证明, 与 2.3 节解析解的结果完全一致。总之, 裂纹表面受均匀正应力 σ 作用的解是

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma \sqrt{\pi a} \\ u &= u_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \\ u_0 &= \frac{2\sigma a}{E} = \frac{\kappa + 1}{4\mu} \sigma a \end{aligned} \quad (2-56)$$

这些结果与无限大板有长度 $2a$ 的中心裂纹, 受到无穷远处单向均匀拉伸应力 σ 作用的解析解相同。

依据能量释放率和叠加原理, 读者可以仿照本节方法, 推导承受非均匀对称荷载的含中心裂纹无限大板, 以及承受非均匀非对称荷载的含中心裂纹无限大板的解析解答。详细内容见参考文献 [6]。

2.7 确定应力强度因子的其他方法

在工程应用时, 要计算应力强度因子, 其计算方法主要有解析法和数值法两

种。解析法包括应力函数法、保角变换法、积分变换法与奇异积分方程法等。在 2.3 节介绍了确定应力强度因子的应力函数方法，在 2.5 节介绍了确定应力强度因子的权函数方法。具有代表性的数值方法为有限元法、有限体积法与边界元法等。

应当指出，除去以上 2 种主要方法之外，还有 2 类方法：半解析—半数值方法与工程闭合解法。边界配位法与解析变分法属于前者，并适用于二维情况，它们的适用范围比解析法宽，而其计算效率比数值法高。值得一提的是对于三维问题，目前有一种以能量释放率原理作为基础的闭合解法，它属于后者，它可以充分利用二维结果给出三维问题的闭合解答，如 2.3 节所述，其适用范围随着二维结果的增加而扩大，而其计算效率比数值法高出 3 个数量级以上。

还有许多确定应力强度因子的方法，如局部—整体法等。关于求解应力强度因子的其他方法，读者可以参考文献 [7] 中应力强度因子的解法，以及在应力强度因子手册和经典断裂力学教科书中找到类似的内容。

2.8 线弹性材料的断裂判据

在前面的讨论中，我们忽略了裂纹尖端应力场的高次项，如式 (2-12)、式 (2-15) 和式 (2-16)，这一忽略仅在裂纹尖端的小区域内适用，此小区域称为 K 场区。 K 场区内的应力—应变强度可用应力强度因子度量； K 场区外则需要考虑高次项。因此，仅用应力强度因子来惟一度量应力—应变场强度已不一定充分。如果 K 场区尺寸小于断裂过程区尺寸，则计算应力强度因子便失去意义，因为此时宏观力学在裂纹尖端区是不适用的。反之，若 K 场区尺寸比断裂过程区尺寸大几倍以上，则断裂过程区是否会发生断裂，要视其外部的 K 场区强度而定。因此，断裂判据可建立在 K 场区强度是否达到临界条件基础上。由于应力不可能无限大，裂纹尖端总会产生塑性区，而塑性区内的应力是有界的。因此，应力强度因子断裂判据成立的条件是塑性区比 K 场区小得多，而 K 场区又比裂纹长度小得多。许多高强度合金和工程材料在发生脆性断裂时，都是 K 场区强度起控制作用。应力强度因子断裂判据适合于这些材料的脆性断裂。

构件在什么条件下会产生失稳断裂呢？如果是脆性材料，同时裂纹尖端塑性区的尺寸又相对较小，则描述裂纹尖端应力场和位移场只需一个力学参量就已足够，这就是应力强度因子 K 。而 K 与描述驱动裂纹扩展能力的力学参量——能量释放率 G （裂纹驱动力）有关，因此，失稳断裂的判据可以表示为

$$K = K_{cr} \text{ 或 } G = G_{cr} \quad (2-57)$$

式 (2-57) 中的 K_{cr} 和 G_{cr} 分别表示为应力强度因子和能量释放率的临界值，即材料的断裂韧度。注意，某些文献中用 $K \geq K_{cr}$ 或 $G \geq G_{cr}$ 代替式 (2-57)，其

中的 γ 仅仅满足数学上的解释,但是没有物理上的意义,式(2-57)是满足裂纹扩展的必要条件。

2.9 小结

本章介绍了裂纹尖端的应力场以及在裂纹扩展过程中能量释放与平衡等重要基本概念;在线弹性理论分析的基础上,引入应力强度因子和材料断裂韧度的概念,给出了确定应力强度因子的解析法、权函数法等若干方法,建立了线性断裂力学失效判据与设计准则。

应力强度因子惟一地刻画了裂纹尖端场的强度,是判定脆性材料断裂的重要参量。对一种特定的断裂类型,裂纹尖端场由单参数 K 完全确定,即由应力强度因子可以推算出能量释放率。

断裂力学失效判据与经典强度失效判据不同的是,它不是以危险点的应力强度,而是以裂纹的应力强度因子(K_I 、 K_{II} 、 K_{III} 等)作为参数。当应力强度因子达到或超过临界值(K_{IC})时,裂纹开始失稳扩展,最终导致断裂。

2.10 习题

2-1 说明在裂纹扩展过程中,物体中有哪些能量参与平衡及其应用条件。

2-2 比较裂纹尖端的 K 场区、塑性区和断裂过程区尺寸,说明应力强度因子断裂判据成立的条件。

2-3 试求I型裂纹尖端应力场的主应力 σ_1 和 σ_2 (主应力表达式见附录A.1.4节)。

2-4 说明断裂力学中应力强度因子与材料力学中应力集中因数的主要区别。

2-5 试用能量原理建立能量释放率与应力强度因子之间的关系。

2-6 为什么说式(2-57)是满足裂纹扩展的必要条件?

2-7 承受压力的铝制管状容器,两端封闭,直径305mm,壁厚5mm,材料的屈服点 $\sigma_s=330\text{MPa}$,断裂韧度 $K_{IC}=41\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$,安全系数2和 $\alpha=1$,试确定安全使用压力和最大允许裂纹长度。

2-8 压力容器直径0.457m,长度1.83m,该容器的设计能力为承受内压力为6.895MPa,壁厚能够承受环向应力为17.24MPa。在使用中,当内压力仅为3.45MPa时发生开裂破坏,微观探伤发现开裂源于内部2.54mm的初始裂纹,求材料的断裂韧度 K_{IC} 。

2-9 一块厚铝合金板,175mm宽,包含75mm长的中心裂纹,在110MPa应力作用下(单轴,垂直裂纹方向)呈脆性开裂。求:(a)试确定材料的断裂韧度;(b)如果板宽到足以假设无限宽的程度,应力强度因子将怎样变化?

2-10 将150kN荷载施加到一个包含35mm长度裂纹的拉伸试件上,引起试件伸长0.5mm;在同样荷载作用下,当裂纹扩展到37mm时,试件伸长0.505mm。该试件厚40mm。

对于裂纹长度为 36mm 的标准试件，其荷载为 175kN。求材料的断裂韧性 K_{IC} 。

2-11 对于图 2-14a 所示荷载作用下含孔边裂纹的方板，应用叠加法由图 2-14b 和图 2-14c 两种情况下孔边裂纹的应力强度因子，计算图 2-14a 情况下的应力强度因子。

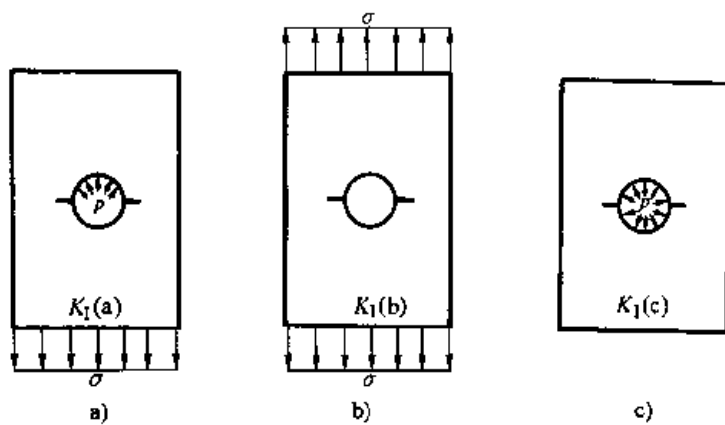


图 2-14 习题 2-11 图

第3章 弹塑性断裂力学

3.1 裂纹尖端塑性区的形成

由线弹性力学分析可以得到裂纹尖端区的应力场随 $r^{-1/2}$ 而发生变化, 因此在裂纹尖端会出现应力奇异性。然而, 从物理学的角度来看, 真正奇异的应力是不可能的。事实上当含裂纹的弹塑性体受到外力作用时, 裂纹端点附近会产生局部塑性区, 塑性区内的应力远低于应力强度因子 K 给出的应力预测值。

对于非常脆的材料, 如铸铁和陶瓷等, 塑性区可能很小甚至可以忽略不计。这时可以采用线弹性断裂力学的分析方法及其结果。对于材料性质介于脆—延性之间, 如果塑性区的尺寸远小于 K 场控制区, 则奇异区内绝大部分应力场取决于应力强度因子, 这种情况称为小范围屈服, 可以采用对线弹性力学导出的应力强度因子进行修正的方法来处理。对于延性较好的金属材料, 塑性区尺寸有可能超出 K 场, 此时, 线弹性断裂力学的理论已不再适用, 即用应力强度因子 K 衡量裂纹端部应力场强度的方法已无意义, 必须采用弹塑性断裂力学的方法分析构件裂纹尖端的应力—应变场。

塑性区域的确定要以裂纹尖端附近的应力场为依据。根据 Mises 屈服准则, 材料进入塑性的条件为

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2 \quad (3-1)$$

式中, σ_1 、 σ_2 和 σ_3 分别是单元体应力状态的三个主应力, σ_s 是材料单向拉伸时的屈服点。

对于图 2-5 所示的平面 I 型裂纹问题, 裂纹尖端附近单元体的主应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_3 &= \begin{cases} 0 & \text{平面应力条件} \\ \nu(\sigma_x + \sigma_y) & \text{平面应变条件} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

将第 2 章中式 (2-12) 代入式 (3-2), 可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ \sigma_2 &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ \sigma_3 &= \begin{cases} 0 & \text{平面应力条件} \\ 2\nu \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} & \text{平面应变条件} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

将式 (3-3) 代入式 (3-1), 可得裂纹前面塑性区边界的极坐标方程如下

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 + 3\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) && \text{平面应力条件} \\ r &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 \left[\frac{3}{4} \sin^2 \theta + (1-2\nu)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] && \text{平面应变条件} \end{aligned} \right\} \quad (3-4)$$

平面应力与平面应变的 I 型裂纹前面塑性区边界形状分别示于图 3-1 中。

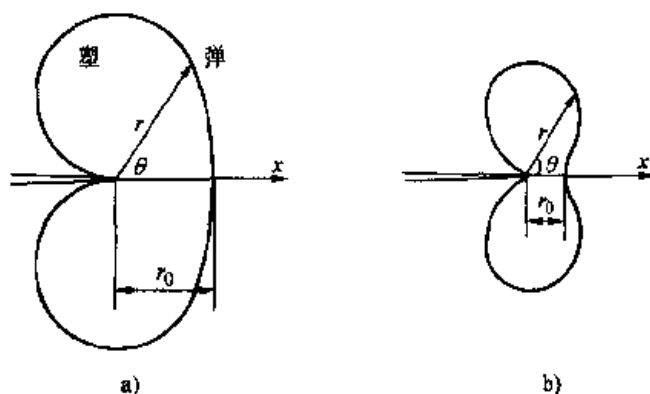


图 3-1 平面应力与平面应变的裂纹前面塑性区边界形状

a) 平面应力塑性区边界 b) 平面应变塑性区边界

在裂纹延长线上, 弹塑性交界点的极径可由式 (3-4) 确定。将 $\theta=0$ 代入式 (3-4), 可得

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 && \text{平面应力} \\ r_0 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 (1-2\nu)^2 && \text{平面应变} \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

从上式中可以看出, 在其他条件相同时, 平面应变的塑性区小于平面应力的塑性区。当 $\nu=0.3$ 时, 平面应变的 r_0 值仅为平面应力的 16%。我们从裂纹延长线上应力状态的差异给予解释。

将 $\theta=0$ 代入式 (3-3), 可得

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

$$\sigma_3 = \begin{cases} 0 & \text{平面应力} \\ 2\nu \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} = \nu(\sigma_1 + \sigma_2) & \text{平面应变} \end{cases} \quad (3-6)$$

将式 (3-6) 代入式 (3-1), 得到裂纹延长线上的屈服条件为

$$\sigma_y = \begin{cases} \sigma_s & \text{平面应力} \\ \frac{\sigma_s}{1-2\nu} & \text{平面应变} \end{cases} \quad (3-7)$$

显然, 在平面应变下开始进入塑性的应力, 高于平面应力下开始进入塑性的应力。其原因是平面应变的单元体处于三向拉伸状态, 而平面应力的单元体处于二向拉伸状态。平面应变的约束强于平面应力, 使材料的塑性流动更加困难。

以上分析完全建立在线弹性基础之上, 即实际上是按照线弹性确定弹、塑性边界。考察图 3-2a 所展示的理想线弹性材料的情况, 裂纹尖端处的弹性影响区 (K 场) 半径为 r_K , 其值与外荷载的大小无关, 仅取决于裂纹形状和尺寸。若材料的响应为弹塑性, 如图 3-2b 所示, 则在裂纹尖端高应力处形成一个塑性区, 其尺度沿裂纹扩展方向为 r_p , 其值随外荷载的提高而增加。该塑性区通过一过渡区与 K 场相连接。小范围屈服指塑性区仍由环形带 K 场区所包围的情况, 即

$$r_p \ll r_K \approx (0.3-0.5)a \quad (3-8)$$

式中, a 为裂纹长度。

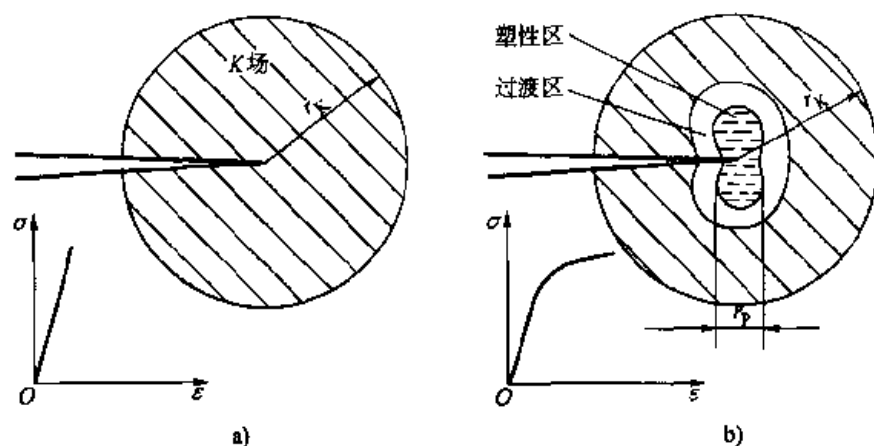


图 3-2 小范围屈服与 K 场环形区域

a) 线弹性材料 b) 弹塑性材料

随着加载幅度的提高, 塑性区不断扩大, 并可能冲破 K 场的范围。小范围屈服一般仅在外载小于 $0.5F_0$ 时才适用, F_0 指含裂纹材料达到全面屈服的荷载, 对理想弹塑性材料, F_0 就是塑性极限荷载。因此, 若外载 F 满足条件

$$F < 0.5F_0 \quad (3-9)$$

则裂纹尖端变形场仍控制在 K 场域内, 裂纹尖端区的塑性变形大小和塑性区尺寸可以由应力强度因子 K 来确定。小范围屈服情况的裂纹尖端 K 场条件式 (3-9) 的等价表达式为 $\sigma_\infty < 0.5\sigma_s$, 其中 σ_∞ 为远场应力, σ_s 为材料塑性屈服点。

3.2 裂纹尖端的张开位移

为了描述弹塑性断裂力学的问题, 必须寻找除了应力强度因子 K 以外的参数, 并且要求新的参量能够有效地测定延性材料的断裂行为。裂纹尖端张开位移便成为表征裂纹尖端塑性变形的一个自然选择。

裂纹张开位移是指在一个客观的参照系下所度量的裂纹表面间的距离, 记为 COD (crack opening displacement), 它可以具体特指裂纹尖端张开位移, 记为 CTOD (crack tip opening displacement), 或裂纹尖端张开角, 记为 CTOA (crack tip opening angle)。它们都是宏观的力学表征参量。

从试验中可以观察到 CTOD。对于带有穿透板厚的裂纹的中低强度、高韧性钢的平板, 在失稳断裂前, 裂端有相当大的塑性区, 裂纹张开位移也相当大且目测可见。类似的现象在压力管道裂纹扩展试验中也可以观察到。

Irwin 和 Dugdale 分别给出了平面应力条件下的小范围屈服时无限大平板中心裂纹受到单向拉伸的 CTOD 为

$$\text{CTOD} = \begin{cases} \frac{4K^2}{\pi E \sigma_s} & \text{Irwin} \\ \frac{\pi \sigma_s^2 a}{E \sigma_s} & \text{Dugdale} \end{cases} \quad (3-10)$$

式中 σ_s 为屈服点。若在小范围屈服时, 塑性区尺寸远小于裂纹长度 a , 此时裂纹的应力强度因子为 $K = \sigma \sqrt{\pi a}$, 利用能量释放率 G 与 K 的关系 (见式 (2-36)), 上式化为

$$\text{CTOD} = \begin{cases} \frac{4G}{\pi \sigma_s} & \text{Irwin} \\ \frac{G}{\sigma_s} & \text{Dugdale} \end{cases} \quad (3-11)$$

可见, 两种方法的计算结果相差 $4/\pi$ 。事实上, 式 (3-11) 的结果并不局限在无限大平板的中心裂纹, 对其他裂纹情况也近似成立。

在工程上, 经常采用 CTOD 或者 CTOA 大于或者等于某一临界值作为起裂判据或断裂判据, 如在压力容器和天然气管道开裂问题上的应用。由于公式的适

用条件为小范围屈服，而研究的绝大多数材料是中低强度、高韧性的材料，若构件尺寸不是很大，则在起裂前已形成了相当大的塑性区，而不再属于小范围的屈服情况。然而，计算大范围屈服时的 CTOD 或者 CTOA 通常是很不容易的。因此，在具体工程应用上，一般采用经过实验检验的半经验半理论的 CTOD 或者 CTOA 表达式。

3.3 J 积分

J 积分是弹塑性断裂力学的核心。Rice 提出用 J 积分计算来综合度量裂纹尖端应力—应变场的强度。考虑图 3-2 所示的二维情况，裂纹与 x_1 的负半轴重合， J 积分的定义为（证明见附录 B）

$$J = \int_{\Gamma} (w n_1 - n_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta} u_{\beta,1}) d\Gamma \quad (3-12)$$

这里 Γ 是由裂纹下表面某点逆时针绕行到裂纹上表面某点的简单的积分围道（见图 3-3）， w 为应变能密度， n_{α} 是围道上某点的法线分量， $\sigma_{\alpha\beta}$ 和 u_{β} 分别为围道上的面力分量和位移分量。如果在 Γ_1 围道内部或外部再增加一个含裂纹尖端的围道 Γ_2 ，可以证明其 J 积分的值与 Γ_1 围道 J 积分的值相等，即 J 积分值与积分路径无关。因此，可以通过应力—应变场较易求解的围道来得到 J 积分值。

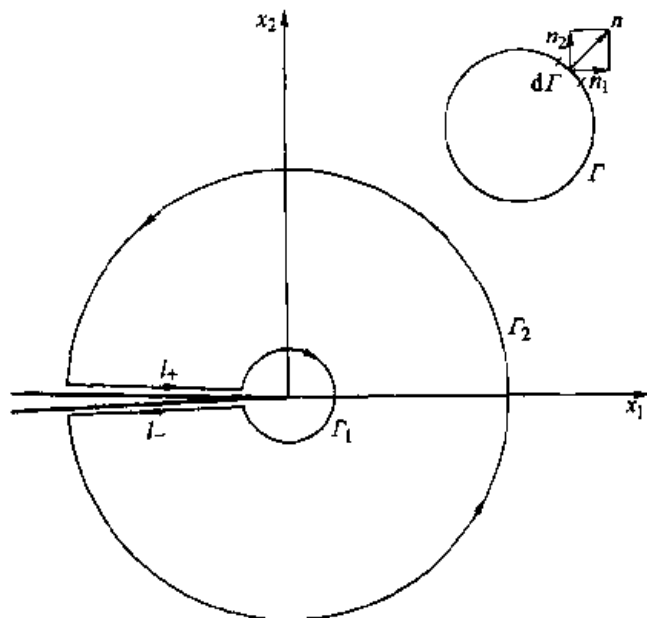


图 3-3 J 积分区域

J 积分是表征材料弹塑性断裂行为的一个参量。当裂纹尖端附近材料处于小范围屈服时，在裂纹前方 K 场域内， J 积分与应力强度因子 K 和能量释放率有

对应的关系。将第2章中线弹性裂纹尖端场表达式代入式(3-12),即可得到这一关系如下:

对于反平面Ⅲ型问题,将围道 Γ 选在 K 场环域内可得

$$J = \frac{K_{\text{III}}^2}{2\mu} = G \quad (3-13)$$

对于平面Ⅰ型问题,将围道 Γ 选在 K 场环域内可得

$$J = \frac{K_{\text{I}}^2}{E} = G \quad (3-14)$$

总之,对于二维线性问题恒有

$$J = G \quad (3-15)$$

这时与路径无关的 J 积分具有能量释放率的物理意义。在小范围屈服时,式(3-15)提供了计算能量释放率的公式。在数值求解能量释放率时,可以寻求精度较高的远场 J 积分值以便避开数值精度较差的裂纹尖端场的 K 值;反之,视计算方便和精度也可以由 K 值得 J 积分值。

3.4 Dugdale-Barenblatt 带状屈服区模型

对含裂纹薄板结构,加载时常在裂纹延长线上形成条状屈服区。以平面应力下的薄板裂纹实验为例,我们观察条状屈服区处的板厚剖面,可见与板前后表面成 $\pm 45^\circ$ 方向的斜面上形成十字交叉状剪切滑移,类似圆钢棒单轴拉伸试验在颈缩区观察到的剪切滑移。Dugdale(1960)和Barenblatt(1962)各自独立地描述了这类带状断裂过程区的模型,是由变形局部化形成了集聚状的塑性屈服区(内聚区),如图3-4a所示。Rice和Drucker证明在Tresca剪切屈服条件和平面应力状态下,屈服区确为带状。

将变形前的带状屈服区处理为一条没有宽度的线,在远场应力作用下,带状屈服区的张开变形导致了分布联结力 $\sigma(\delta)$,它是张开位移 δ 的函数,如图3-4b所示,图中水平线表示理想塑性条件的屈服应力值。Barenblatt称该联结力为内聚力,其变化规律如图3-4c所示。当 $\delta = \delta^*$ 时,联结失效,内聚力衰减为零。

条状塑性区的长度记为 R ,如图3-4a所示。此时条状塑性区已被切开,裂纹长度为 $2L = 2(a + R)$ 。在 $a < |x_1| < L$ 处作用有内聚力 $\sigma(\delta)$,条状屈服区以外的介质呈线弹性,因此可以应用叠加原理。考虑半长为 L 的中心裂纹在远场应力 σ_∞ 下的解,由表2-1中第一项,得到其对应的应力强度因子为

$$K_{\text{I}} = \sigma_\infty \sqrt{\pi L} \quad (3-16)$$

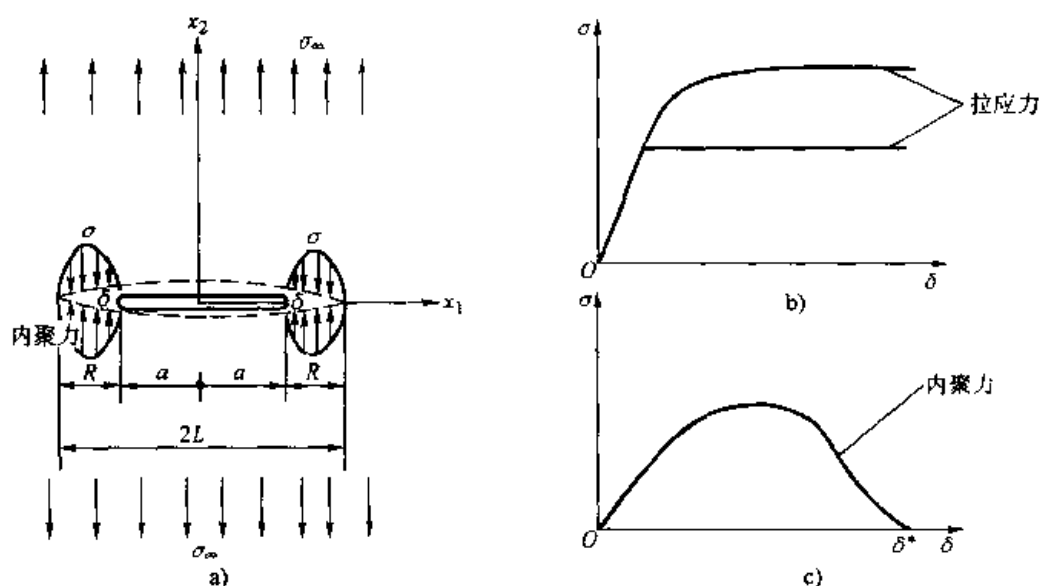


图 3-4 条状屈服区的内聚力模型

由式 (2-18), 得到裂纹尖端张开位移为

$$\delta = \frac{4\sigma_{\infty}}{E} \sqrt{L^2 - a^2} \quad (3-17)$$

Dugdale 考察了理想塑性条件屈服区的特例, 由

$$\sigma(\delta) = \sigma_s$$

得到条状屈服区的长度和裂尖场的张开位移分别为

$$\frac{R}{a} = \sec\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_s}\right) - 1 \quad (3-18)$$

$$\delta(a) = \frac{8\sigma_s a}{\pi E} \ln\left[\sec\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_s}\right)\right] \quad (3-19)$$

在小范围屈服的条件下, 可取 $\frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_s}$ 为小量, 取上述两式关于 $\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_s}\right)$ 渐近展开式的首项, 可得

$$R = \frac{a\pi^2}{8} \left(\frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_s}\right)^2 = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_I}{\sigma_s}\right)^2 \quad (3-20)$$

$$\delta = \frac{a\pi}{E\sigma_s} \sigma_{\infty}^2 = \frac{G}{\sigma_s}$$

式中, $K_I = \sigma_{\infty} \sqrt{\pi a}$ 为不考虑条状塑性区的应力强度因子; G 为不考虑条状塑性区的能量释放率。由此推出式 (3-20) 中的第二式即为式 (3-11) 中的第二式 (令 $CTOD = \delta$), 因此式 (3-20) 为小范围屈服条件下的 Dugdale 解答。

利用 Dugdale - Barenblatt 带状屈服区模型计算 J 积分与原裂纹尖端张开位移 $CTOD$ 的关系。如图 3-5 所示, 取围绕条状屈服区的围道 Γ_{DB} , 并沿该围道计

算 J 积分值。由于沿围道 Γ_{DB} 有 $n_1 = 0$ ，即围道的法线始终沿着坐标 x_2 方向。所以，由式 (3-12) 有

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Gamma_{DB}} -n_\alpha \sigma_{\alpha\beta} u_{\beta,1} d\Gamma = \int_a^{a+R} \sigma(x_1) \frac{\partial u_2^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_{a+R}^a \sigma(x_1) \frac{\partial u_2^+}{\partial x_1} dx_1 \\ &= - \int_a^{a+R} \sigma(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} (u_2^+ - u_2^-) dx_1 = - \int_a^{a+R} \sigma(x_1) \frac{\partial \delta(x_1)}{\partial x_1} dx_1 \\ &= \int_{\delta(a+R)}^{\delta(a)} \sigma(\delta) d\delta = \int_0^{\delta_t} \sigma(\delta) d\delta \end{aligned} \quad (3-21)$$

式中， $\sigma(x_1)$ 作为在内聚区的法向内聚力； $\delta(x_1) = u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)$ 为裂纹尖端张开位移；在最后一步推导中利用了 $\delta(a) = \delta_t$ 为原裂纹尖端的张开位移 CTOD，和 $\delta(a+R) = 0$ 。

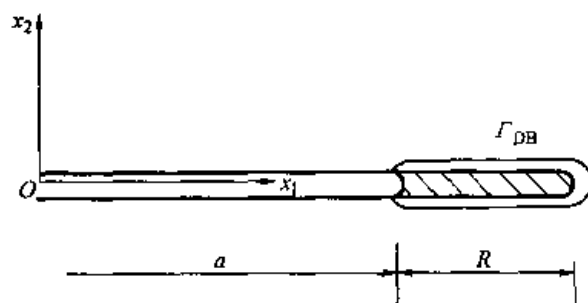


图 3-5 J 积分与原裂纹尖端张开位移 CTOD 的关系

对于理想弹塑性材料模型， $\sigma(\delta) = \sigma_s$ 为裂纹前面材料的屈服强度，代入式 (3-21) 得到

$$J = \sigma_s \delta_t \quad (3-22)$$

或记为

$$\text{CTOD} = \delta_t = \frac{J}{\sigma_s} \quad (3-23)$$

上式给出了理想弹塑性材料模型下 J 积分与原裂纹尖端张开位移之间的简单关系。由此可见， J 积分理论是延性断裂判据的基础。

在其他材料模型下， J 积分与 δ_t 的关系为

$$\text{CTOD} = \delta_t = d \frac{J}{\sigma_0} \quad (3-24)$$

式中， d 是一个与材料无量纲参数组合有关的系数； σ_0 为参考应力。

内聚力模型首先由 Dugdale 和 Barenblatt 提出，并在研究裂纹尖端附近材料的非线性行为时得到了广泛的应用。在最初的模型中，内聚区尺度远小于裂纹长度。现在的许多工作将这一模型扩展应用到多晶和复合材料，内聚区的尺度也不是很小，影响内聚力的机制也各异，如摩擦力、桥联力和约束力等。尽管这些力

的物理来源不同,但是内聚力的一般性意义是一致的。

3.5 弹塑性材料的 J 积分起裂准则

J 积分作为衡量断裂强度的参量具有下述优点:

1) J 积分与路径无关,为计算提供了方便。

2) J 积分代表驱动裂纹平移扩展的广义能量,在小范围屈服的情况下, J 积分等价于能量释放率 G (见式 (3-15))。

3) J 积分表征裂纹尖端处的场强度,类似于线弹性断裂力学中的应力强度因子 K 值。

4) J 积分与 CTOD 有简明的对应关系 (见式 (3-23))。

5) J 积分值可直接由裂纹试件通过实验测定的荷载位移曲线而得到,如紧凑拉伸试验、三点弯曲试验、缺口拉棒试验 (见第 5 章)。

因此, J 积分可以作为弹塑性材料的起裂准则,即当

$$J = J_{IC} \quad (3-25)$$

时,便发生弹塑性裂纹扩展。 J_{IC} 为平面应变的 J 积分值,可以通过实验进行测量。我国在 1980 年建立了测量 J_{IC} 的标准。在小范围屈服情况下,可由 J_{IC} 值推算平面应变的 K_{IC} 值,其值为

$$K_{IC} = \sqrt{\frac{EJ_{IC}}{1-\nu^2}} \quad (3-26)$$

这一可交换的好处是能够大大降低试验件的重量。钢紧凑拉伸和 C 型试件的测试结果表明:若以式 (3-26) 的右端项代替 K_{IC} ,则对试件尺寸的要求可以从小范围屈服条件式 (5-14) (见第 5 章) 降低为

$$a, c, B \geq \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (3-27)$$

此时,试件的重量可以降低为原先的 6.25%。

严格地说,作为衡量裂纹尖端区应力—应变场强度的力学参量 J 积分的路径无关性是建立在裂纹尾端不发生卸载的情况下。然而,延性断裂通常有裂纹起裂、稳定扩展和失稳扩展三个阶段,在扩展裂纹的后面常常伴随着局部卸载,因此,应用 J 积分作为起裂判据是完全正确的,但用来预测失稳扩展则遇到一定的困难。此时, J 积分并不是严格有效的。

3.6 HRR 场

对于幂硬化材料平面问题的静止裂纹尖端场,又称为 HRR 场,是由

Hutchinson, Rice 和 Rosengren 建立的。材料的应力—应变关系在裂纹尖端附近可以近似化为

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx a \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (3-28)$$

式中 σ_0 和 ε_0 分别为参照应力和参照应变； a 和 n 分别为幂硬化系数和幂硬化指数。

同弹性裂纹体的 K 一样， J 积分可度量裂纹尖端场的强度。由 J 积分定义的 HRR 场的应力、应变和位移为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \sigma_0 \left(\frac{J}{a\sigma_0\varepsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\theta, n) \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= a\varepsilon_0 \left(\frac{J}{a\sigma_0\varepsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\theta, n) \\ u_a - \bar{u}_a &= \frac{J}{\sigma_0 I_n} \left(\frac{J}{a\sigma_0\varepsilon_0 I_n r} \right)^{-\frac{1}{n+1}} \bar{u}_a(\theta, n) \end{aligned} \right\} \quad (3-29)$$

HRR 场中应力的奇异性为 $r^{-1/n+1}$ ，应变的奇异性为 $r^{-n/n+1}$ ，位移按照 $r^{1/n+1}$ 的变化规律趋于零。当 $n=1$ 时，材料的应力—应变关系为线性，HRR 场的奇异性退化为 K 场奇异性；当 $n>1$ 时，HRR 场的应力奇异性低于 K 场，应变奇异性高于 K 场。

在小范围屈服的情况下，由式 (2-36) 和式 (3-15)，对于 I 型裂纹有

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \quad (3-30)$$

3.7 J 阻力曲线

材料的 J 积分阻力值（即 J_R 值）随裂纹扩展量 Δa 的变化曲线称为 J 阻力曲线。典型的 J 阻力曲线如图 3-6 所示。

我们首先讨论图 3-6 中左图所示的 J 阻力曲线。曲线由两部分组成， J_{IC} 值以下为斜直线，以上为曲线。当外加 J 积分值小于 J 积分的临界值 J_{IC} 时，裂纹钝化却并不撕裂，图中虚斜线为刻画这一过程的钝化线；当 J 积分值超过 J_{IC} 时，裂纹钝化至一定程度后呈稳定撕裂。在不同 J 值下所得撕裂量 Δa 的曲线便是 J 阻力曲线，而钝化线与 J 阻力曲线起裂处切线交点的纵坐标为起裂韧性 J_{IC} 。由 J 阻力曲线的初始段来测定 J_{IC} 已有国家标准。在标准阻力曲线的绘制中，常将裂纹钝化的影响除去，于是 J 阻力曲线如图 3-6 中右图所示，且

$$J_{IC} = J_R(0) \quad (3-31)$$

对一般的韧性材料, J_R 随 Δa 增加而迅速上升, $J_R - \Delta a$ 曲线表示了韧性材料随裂纹扩展而发掘出来的材料抗裂潜力。 J 阻力曲线常具有上限平台, 其值为

$$J_{SS} = \lim_{\Delta a \rightarrow \infty} J_R(\Delta a) \quad (3-32)$$

它代表了定常情况下的饱和 J 值。不同材料的 J_{SS} 值可在 J_{IC} 的几倍至几十倍的范围内变化。 J 阻力曲线的上升速度可由一材料长度 D 来度量, 从对图 3-6 中右图的分析可以得到

$$D = \frac{J_{IC}}{(dJ_R/d\Delta a)_{\Delta a \rightarrow 0}} \quad (3-33)$$

D 值略小于 J_R 值自 J_{IC} 加倍时裂纹所扩展的距离。 D 值较大, 表明材料抗裂纹扩展能力较弱; D 值较小, 表明材料抗裂纹扩展能力较强。

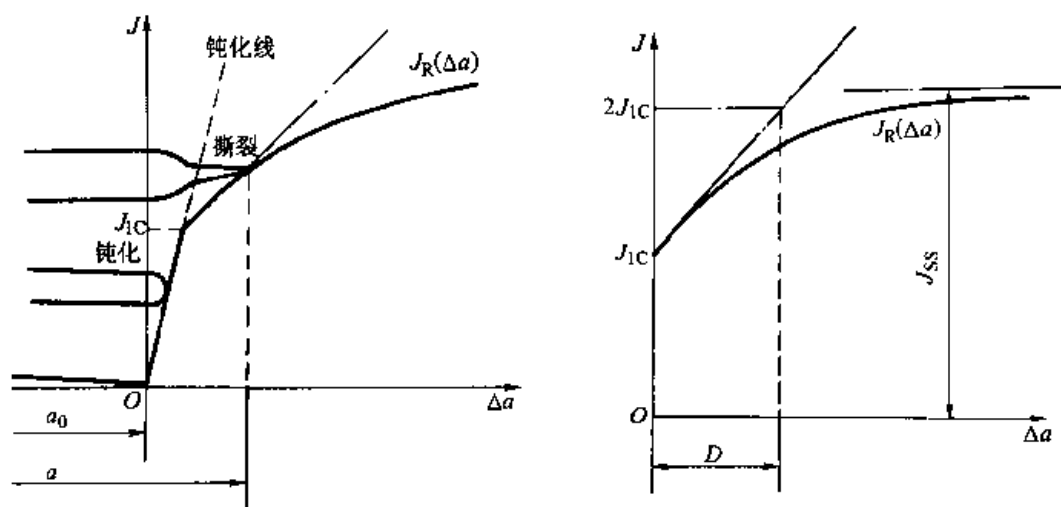


图 3-6 J 阻力曲线

3.8 关于 J 积分的讨论

3.8.1 J 积分的限制

以上讨论的守恒积分 (J 积分) 受到如下限制:

- 1) 张开型 (I 型) 裂纹。
- 2) 无体力荷载。
- 3) 等厚度板。
- 4) 均匀温度场。
- 5) 二维问题。

许多工程构件的实际情况均突破了以上的限制, 如:

- 1) 复合型裂纹。

- 2) 有体力情况。
- 3) 变厚度情况。
- 4) 非均匀温度场。
- 5) 三维问题。

针对以上各种情况所建立的守恒积分称为广义守恒积分, 这一部分内容请参考有关文献。

3.8.2 J 积分与应力强度因子的关系 (线弹性)

对于线弹性材料, 利用 J 积分与应力强度因子的关系可以方便地求得 J 积分值。如图 3-3 所示, 代表不计体力含裂纹等厚度板裂纹尖端附近一个区域, 该区域边界 Γ_1 为一圆周, 圆心在裂纹尖端上。沿围绕裂纹尖端区域的附近边界 Γ_1 和远处边界 Γ_2 可以写出两个 J 积分式, 其表达式由式 (3-12) 改写而成。考虑应变能密度函数, 围道上的面力和位移分量, 积分后得到

$$J_1 = \frac{1}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) \quad \text{平面应力} \quad (3-34)$$

$$J_1 = \frac{1-\mu}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) \quad \text{平面应变} \quad (3-35)$$

由此可见, 在线弹性范围内, J_1 就是能量释放率 G 。同理, 可以写出 J_2 的表达式为

$$J_2 = -\frac{1}{E}2K_I K_{II} \quad \text{平面应力} \quad (3-36)$$

$$J_2 = -\frac{1-\mu}{E}2K_I K_{II} \quad \text{平面应变} \quad (3-37)$$

这些表达式给予我们很大的启发, 如果求解的问题突破了 J 积分的限制条件, 可以借助于有限元等数值解法, 分别解出 J_1 和 J_2 , 然后代入式 (3-34) 和式 (3-36) (平面应力) 或者式 (3-35) 和式 (3-37) (平面应变) 中联立解出 K_I 和 K_{II} 。许多工程构件的实际情况必然会突破守恒积分的限制, 如前面所列出的广义守恒积分, 均可以借助于数值解法得到 J 积分值, 再得到所解问题的应力强度因子。

3.9 断裂过程区

断裂总是始于裂纹尖端的微小区域, 它是材料的微结构起决定影响的地方, 这个微小区域叫做断裂过程区 (fracture process zone)。因此, 可以将第 3.1 节所描述的裂纹尖端塑性区细分为断裂过程区和塑性区。在宏观断裂力学中, 断裂过程区是一个不可捉摸的黑匣子。根据对断裂过程的某种预计, 如大变形、损伤、

细观结构等，可以大致估算出断裂过程区的尺寸和确定出该区域的力学特征。然而，黑匣子内所发生的断裂事件却无法用宏观断裂的理论加以解释，需要借助细观力学的损伤理论和本构关系。

断裂过程区研究的第一个基本问题在于建立过程区的本构关系。首先，过程区内的损伤过程可能严重地影响到其平均本构关系，因此，要考虑如何建立软化的本构方程和损伤演化方程。其次，在裂纹尖端尺度的范围内，要考虑由于损伤引起的非连续分布场，建立模拟分析的离散几何图像。最后，在更靠近裂纹尖端的区域内，由于应力梯度的急剧变化，连塑性行为也不应视为连续的，而应看作离散的位错在弹性基体上的运动。

断裂过程区研究的第二个基本问题在于确定裂纹顶端的轮廓。该裂端形貌是材料裂纹尖端处塑性大变形和损伤的共同产物，其几何形状带有材料细微结构的印记。

断裂过程区研究的第三个基本问题在于阐明过程区根部的分离条件。这一分离条件的细观解释需以应力作用下的价键分离为基础，兼顾裂纹顶端轮廓、细观损伤几何和细观韧带失稳。其宏观表现为界面材料连接力的释放或者裂纹附近能量平衡的变化。

为了能够对断裂过程区进行描述，断裂力学的发展在近年来出现了由宏观至细观，再由细观至纳观的研究趋势。断裂力学与断裂物理相结合而形成宏细微观断裂力学，已成为学科发展的趋势。

3.10 小结

本章讨论了弹塑性断裂力学问题。事实上，裂纹尖端处的材料都会不可避免地产生塑性变形，因此，在第2章中由线弹性理论导出的计算公式便不再适用，尤其是对于塑性变形过程非常敏感的细微观结构。但是，当应力很低，且裂纹尖端的塑性区尺寸相对于裂纹长度和试样尺寸很小时，由线弹性理论给出的公式仍然适用；当应力较高时，则需要作一定的修正。

现有的宏观断裂准则可以分成3类：

1) 具有热力学意义，基于流入裂纹尖端过程区能量的准则，如能量释放率 G (或者称为裂纹驱动力) 准则。

2) 具有力学意义，基于裂尖过程区域场强度的准则，如应力强度因子 K 和裂纹驱动力 G 准则。

3) 具有变形几何学意义，基于裂纹尖端形貌的经验性、半经验性准则，如3.2节所述的 COD、CTOD 和 CTOA 等准则。

J 积分准则兼具上述三重意义。因此， J 积分可以作为弹塑性材料的起裂准

则。因为 J 积分值与积分路径无关。因此，可以通过应力—应变场较易确定的围道来得到 J 积分值。

3.11 习题

3-1 为什么说 J 积分兼具有描述裂纹尖端能量释放率、场强度和变形几何的意义？

3-2 为什么不能由宏观断裂力学描述断裂过程区？

3-3 为什么说 J 积分理论是延性断裂判据的基础？

3-4 当裂纹尖端附近材料处于小范围屈服时，在裂纹前方 K 场域内， J 积分与应力强度因子 K 和能量释放率有对应的关系。对于平面 I 型问题，将 J 积分围道 Γ 选在 K 场环域内（例如，图 3-3 中的内圈 Γ_1 ），将线弹性裂纹尖端场表达式代入式（3-12），证明式（3-14）成立。

3-5 对于小范围屈服，为什么说式（3-15）为能量释放率 G 的数值计算提供了方便？

3-6 在选择恰当的积分围道后，试计算 I 型裂纹的双悬臂梁试件的 J 积分值。

3-7 试用特雷斯卡屈服准则推导 I 型裂纹的裂纹尖端塑性区形状。

3-8 试用米赛斯屈服准则做出 II 型裂纹的塑性区形状。

第4章 裂纹扩展和止裂

4.1 裂纹扩展

结构构件或者机械和仪器的零部件,乃至电子封装系统的焊接件,在交变应力(来自机械力或者热和电场)作用下发生的失效,称为疲劳破坏。统计结果表明,在各种机械零件的断裂事故中,大约有80%以上是由于疲劳失效引起的。由此可见机械疲劳裂纹扩展分析的重要性。

裂纹扩展可分为失稳扩展和亚临界扩展两种,失稳扩展意味着裂纹一旦扩展将会导致结构破坏。亚临界裂纹扩展则不然,若把导致裂纹扩展的原因除去,可以很快止裂。亚临界裂纹扩展可依据荷载种类和环境介质分为蠕变裂纹扩展、机械疲劳裂纹扩展、应力腐蚀裂纹扩展和腐蚀疲劳裂纹扩展四种。在第3章中介绍的延性断裂发生前的亚临界裂纹扩展属于蠕变裂纹扩展的一种。在下面几节中将描述机械疲劳裂纹扩展和应力腐蚀裂纹扩展的有关内容。引起机械疲劳裂纹扩展的主要原因是物理机制,而引起应力腐蚀裂纹扩展的主要原因是化学机制。

在裂纹扩展寿命预报方面,到目前为止,在工程技术上采用的是断裂力学方法,它包括两部分内容:其一是计算裂纹前沿的应力强度因子,如在第2章和第3章中所讨论的内容;其二是确定裂纹扩展的速率。本章讨论的是直线扩展的二维张开型(I型)裂纹。

4.2 循环荷载裂纹扩展

在工程结构中含有裂纹是难免的,至关重要的是能够预见在交变循环载荷下的裂纹扩展速度,这样,使部分含有损伤缺陷的部件,在裂纹达到临界长度之前,得到修理和更换。根据断裂力学的结果,当应力强度因子达到其临界值 K_{IC} 时,裂纹长度也达到失稳扩展的临界值 a_c ,由式(2-34)可以看出, $K_{IC} = \sigma \sqrt{\pi a_c}$ 。应力强度因子的表达式见第2章中表2-1。

大量的实验结果证明,裂纹增长速率可能与应力强度因子的循环变化相关,其表达式为

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K)^m \quad (4-1)$$

式中, da/dN 为每一次循环的疲劳裂纹增长速率; $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ 为每一次循环中应力强度因子的变化幅值; C 和 m 为取决于材料、环境、载荷频率、温度和应力变化率的参数。这一公式称为 Paris 定律。疲劳裂纹扩展速率曲线如图 4-1 所示。

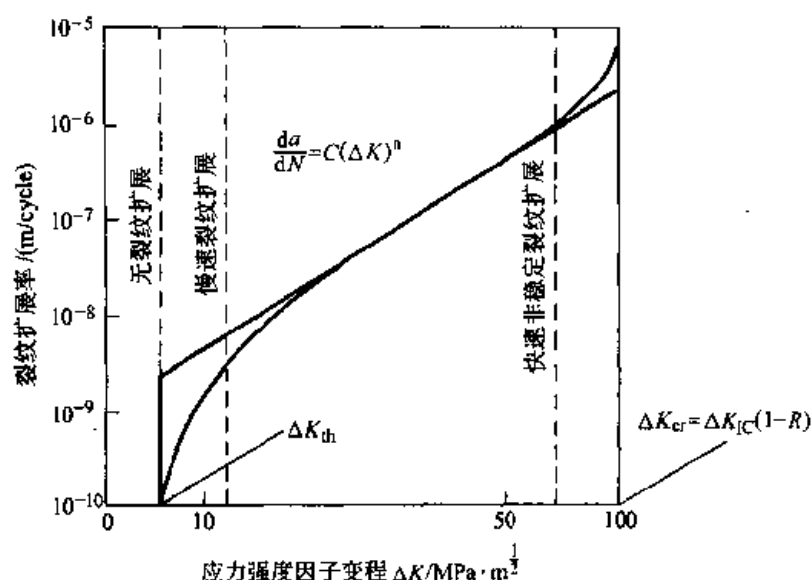


图 4-1 疲劳裂纹扩展速率曲线

对于大多数金属材料, 指数 m 的值在 2~7 之间。表 4-1 列出了各种合金材料的 Paris 方程中的参数数值。

表 4-1 合金材料的 Paris 方程中的参数数值

合金	m	C
钢	3	10^{-11}
铝	3	10^{-12}
镍	3.3	4×10^{-12}
钛	3	10^{-11}

4.3 等幅交变荷载下的裂纹扩展寿命

等幅交变荷载是指荷载的最大值与最小值不随加载循环次数改变的周期性加载, 如图 4-2 所示。在本节将研究等幅交变荷载下的裂纹扩展寿命。

采用 Paris 式 (4-1) 的裂纹扩展速率表达式, 式中 C 、 m 为由实验测定的

已知量。将应力强度因子的变程 ΔK_I 写成为

$$\Delta K_I = \Delta \sigma Y(a) \quad (4-2)$$

式中

$$Y(a) = \alpha(a) \sqrt{\pi a}$$

于是

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta \sigma)^m Y^m(a) \quad (4-3)$$

当裂纹从初始长度 a_0 扩展到 a_e , 对上式积分

$$\int_0^{N_e} dN = \int_{a_0}^{a_e} \frac{Y^{-m}(a)}{C(\Delta \sigma)^m} da$$

得到裂纹扩展寿命 N_e 等于

$$N_e = \int_{a_0}^{a_e} \frac{Y^{-m}(a)}{C(\Delta \sigma)^m} da \quad (4-4)$$

在等幅加载条件下, 对于任何一个荷载循环周期, $\Delta \sigma$ 保持同一数值, 与裂纹尺寸无关。于是, 上式可以写成如下形式

$$N_e = \frac{1}{C(\Delta \sigma)^m} \int_{a_0}^{a_e} Y^{-m}(a) da \quad (4-5)$$

式(4-5)即是等幅交变荷载下, 裂纹扩展寿命的计算公式。

对于承受均匀拉力含中心裂纹的无限大板而言, $\alpha(a) = 1$ 。于是, 式(4-2)中的 $Y(a) = \sqrt{\pi a}$, 将其代入式(4-5), 并进行积分, 可知裂纹扩展寿命为

$$N_e = \frac{2}{C(\Delta \sigma)^m \pi^{\frac{m}{2}} (m-2)} \left[a_0^{\frac{2-m}{2}} - a_e^{\frac{2-m}{2}} \right] \quad (4-6)$$

对于有限宽板, 式(4-5)右端的积分不易写成简单的表达式, 可以绘制关于 $Y^{-m}(a) - a$ 曲线图 (如图 4-3 所示), 数值求解曲线下的面积 A , 则裂纹扩展

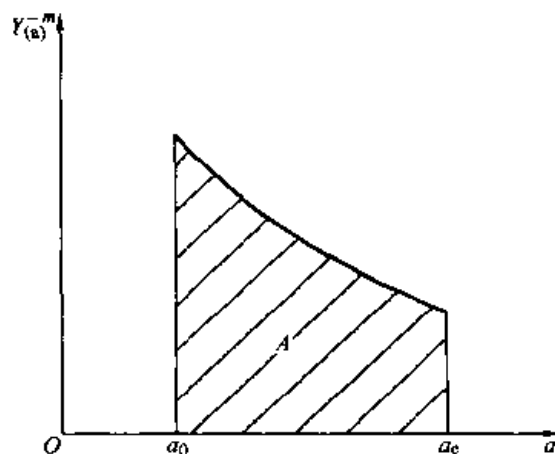


图 4-3 式 (4-5) 中 $Y^{-m}(a) - a$ 曲线所围面积图

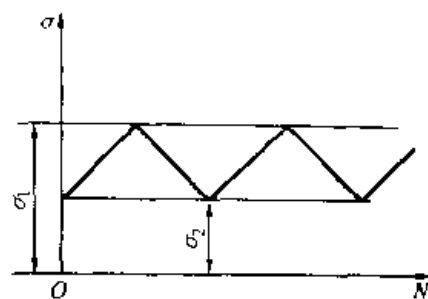


图 4-2 等幅交变荷载

寿命为

$$N_e = \frac{A}{C (\Delta\sigma)^m} \quad (4-7)$$

因为大多数工程金属材料的 $m > 2$ ，如表 4-1 所示，故式 (4-6) 的 N_e 恒为正值。当 $a_0 \ll a_e$ 时，上式中括号内的末项趋于零。可见对疲劳裂纹寿命影响最大的因素，除材料常数和应力外，还有初始裂纹长度 a_0 ，而断裂时的裂纹长度影响甚微。因此，提高疲劳寿命的主要措施是控制材料性质和工作荷载，同时要加强对初始裂纹（含夹杂和缺陷，以及表面凹痕）的检查和探伤，以便及早发现微裂纹和降低 a_0 值。

4.4 变幅交变荷载下的裂纹扩展寿命

变幅交变荷载是指荷载的最大值与最小值均随加载循环次数改变的周期性加载，如图 4-4 所示。荷载的最大值与最小值的一次周期变化称为一个加载周期。我们将讨论变幅交变荷载下的裂纹扩展寿命。以往，这一问题只有采用数值方法求解，这种做法效率低、精度差，参考文献 [6] 给出了这一问题的闭合解法。

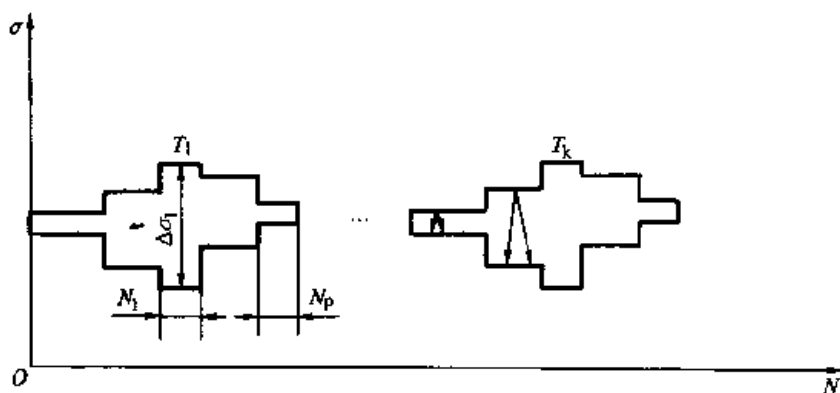


图 4-4 变幅交变荷载

假设经历 N_e 个加载循环或者 T_e 个加载周期之后，裂纹尺寸由 a_0 扩展到 a_e 。 N_e 和 T_e 分别称为临界加载循环数和临界加载周期数。对于任一个加载周期 T_k 而言，荷载谱可被看成是由 n 个恒荷载组成。令 $\Delta\sigma_i$ 为第 i 个恒荷载的应力改变量， N_i 表示相应的循环次数。将 Paris 式 (4-1) 和式 (4-3) 写成分离变量的微分方程如下

$$\frac{da}{Y^m(a)} = C(\Delta\sigma)^m dN \quad (4-8)$$

于是进行积分,有

$$\int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{Y^m(a)} = \int_0^{N_e} C(\Delta\sigma)^m dN \quad (4-9)$$

显然,上式右端可以写成如下形式

$$\int_0^{N_e} C(\Delta\sigma)^m dN = \sum_{k=1}^{T_e} \int_{N_k}^{N_{k+1}} C(\Delta\sigma)^m dN \quad (4-10)$$

式中, N_k 和 N_{k+1} 分别表示第 T_k 个加载周期开始和结束时相应的加载次数。可以看出,对于周期性变幅加载情况,每一个加载周期的荷载谱相同。这样的加载周期共有 T_e 个。于是,式(4-10)又可以写成如下形式

$$\int_0^{N_e} C(\Delta\sigma)^m dN = T_e \int_{N_k}^{N_{k+1}} C(\Delta\sigma)^m dN \quad (4-11)$$

在每个等幅加载循环之中,由于 $\Delta\sigma_i, C_i, m$ 均为常数,上式右端之积分可以写成分段形式为

$$\int_{N_k}^{N_{k+1}} C(\Delta\sigma)^m dN = \sum_{i=1}^p C_i (\Delta\sigma_i)^m N_i \quad (4-12)$$

将式(4-12)代入式(4-11),依次再代入式(4-10)和式(4-9),可以得到临界加载周期为

$$T_e = \frac{A}{\sum_{i=1}^p C_i (\Delta\sigma_i)^m N_i} \quad (4-13)$$

式中

$$A = \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{Y^m(a)}$$

将式(4-13)改写成如下形式

$$T_e = \frac{1}{\sum_{i=1}^p \left\{ \frac{C_i (\Delta\sigma_i)^m}{A} \right\} N_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^p \frac{N_i}{N_{ie}}} \quad (4-14)$$

式中

$$N_{ie} = \frac{A}{C_i (\Delta\sigma_i)^m}$$

这是在等幅荷载 $\Delta\sigma_i$ 作用下的裂纹扩展寿命。式 (4-14) 表明, 疲劳理论中的 Miner 线性累积损伤准则在裂纹扩展寿命估算中也是成立的。以上的分析略去了等幅荷载之间各个不同幅值的相互影响。如果在一个加载周期内, 相邻荷载变化量之比小于 1.5 时, 上述影响可以略去; 另外, 在短周期加载情况下, 即在 $T_e \gg 1$ 的情况下, 这一影响也可以略去。以上分析对于航空领域中的运输机和客机, 以及起落架等结构都是适用的。

4.5 环境因素和应力腐蚀开裂

据美国机械工程师协会 (ASME) 所属的腐蚀学会在给美国国会 2002 年度的报告中指出, 美国每年由腐蚀造成的损失约为 2760 亿美元, 直接影响美国经济 GDP (gross domestic product) 达 3.1%。这些损失影响到运输业、制造业、能源业、家用消费品、国防和基本建设等工业部门, 其中很大一部分是与材料和结构的腐蚀开裂有关。

结构应力腐蚀开裂 (stress corrosion cracking) 是一种非常危险的破坏, 一般在低应力下就有可能发生, 而且脆性断裂前没有预兆, 容易发生恶性事故, 结构的寿命在应力腐蚀开裂下也比化学腐蚀短的多。

发生应力腐蚀的 3 个基本条件是:

(1) 活性介质: 对于不同的钢材, 比较敏感的活性介质是不相同的, 一般的奥氏体不锈钢和铁素体不锈钢非常惧怕氯化物水溶液, 碳钢则对硝酸或碱溶液较敏感。

(2) 应力: 主要是拉伸应力, 它来源于外荷载, 如应力集中; 加工残余应力, 如焊接和热处理等。

(3) 敏感性微结构: 组织结构对应力腐蚀开裂的敏感性有相当大的影响, 反映在宏观力学性能方面, 应力腐蚀敏感性随材料的强度增高而上升。一般的碳钢或者低合金高强度钢的 σ_s 大约在 700MPa 以上, 才对应力腐蚀比较敏感, 这与马氏体强化有关。

由于应力腐蚀, 形成内部缺陷、表面凹痕或者表面裂纹, 这是导致发展成穿透壁厚的裂纹和扩展裂纹的危险根源。

为了提高抗应力腐蚀的强度, 采用光滑试件, 在介质环境下用恒荷载拉力机加载, 测量在不同应力水平下试件支撑到断裂的时间, 如图 4-5 所示。可见, 随着应力水平的下降, 支撑时间可加长, 当应力小于抵抗应力腐蚀的强度极限时, 寿命可能达到所希望的时间。因此, 可以设计结构或者材料的工作应力水平低于抗应力腐蚀的强度极限, 这就是无限寿命的设计概念。

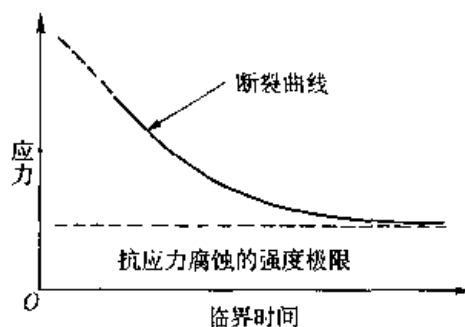


图 4-5 试件在介质环境下应力 - 断裂时间曲线

我们采用类似 Paris 定律的假设, 裂纹扩展速度可能与应力强度因子的变化相关, 其表达式为

$$\frac{da}{dt} = BK_I^n, \quad K_I > K_{th} \quad (4-15)$$

式中, a 为裂纹长度; da/dt 为应力腐蚀的裂纹增长速率; B 和 n 为取决于材料、环境、温度和应力变化率的参数; K_{th} 为应力腐蚀条件下应力强度因子的门槛值, 是考虑应力腐蚀的材料断裂韧性, 可由试验确定。

应力腐蚀开裂的裂纹尖端应力与时间变化曲线如图 4-6 所示。在式 (4-15) 中, 因为

$$K_I = \sigma Y(a) \quad (4-16)$$

代入式 (4-15) 后, 得到

$$\frac{da}{dt} = B\sigma^n Y^n(a) \quad (4-17)$$

分量变量后, 当裂纹从初始长度 a_0 扩展到 a_{cr} , 对上式积分可得到

$$B\sigma^n t_{cr} = \int_{a_0}^{a_{cr}} Y^{-n}(a) da = \lambda = \text{const} \quad (4-18)$$

应力强度因子的临界值和门槛值分别为

$$K_{Icr} = \sigma Y(a_{cr}) \quad (4-19)$$

$$K_{th} = \sigma_{th} Y(a_0) \quad (4-20)$$

当应力腐蚀条件下的应力强度因子 K_I 低于门槛值 K_{th} 时, 此时裂纹尖端的应力水平低于 $\sigma_{th}(a_0)$, 如图 4-6 所示, 随着应力水平的下降, 裂纹不再扩展, 结构支撑时间可加长, 当应力水平小子抵抗应力腐蚀的强度极限时, 寿命可能达到所希望的时间。故有

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad K_I < K_{th} \quad (4-21)$$

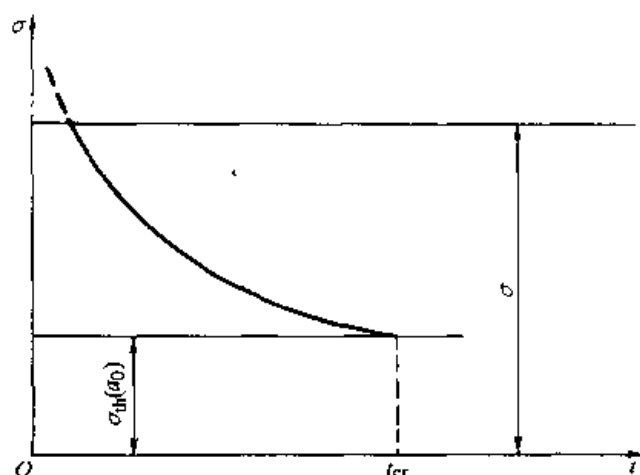


图 4-6 应力腐蚀开裂的裂纹尖端应力与时间变化曲线

4.6 单调加载下的止裂措施

在工程上，避免裂纹失稳扩展事故是极为重要的，这种问题被认为是断裂力学研究领域中最重要的问题之一。研究的目的是保证裂纹驱动力（能量释放率） G 小于材料的断裂韧性 G_C ，使由于某些非确定因素引起的微裂纹不至于迅速扩展，从而使破坏程度限于在尽可能小的局部范围。

裂纹失稳扩展事故的特点一般是裂纹一旦起裂，就以相对稳定的速度向前扩展。目前已经普遍认识到，这种引起裂纹扩展的起裂原因是无法完全预测的，而且事故的危害是非常严重的，如航空器、天然气管道和核反应堆冷却管路的开裂事故。因此，止裂措施被认为是控制这种事故发生的第二道防线。当前，止裂构件的分析和设计越来越受到关注。

当发生断裂时，裂纹是一直扩展下去还是发生止裂，这主要取决于阻力的大小。裂纹扩展，裂纹尖端塑性区要加大，阻力 R 也可能增加，如图 4-7 所示。虚线 AB 是根据静态裂纹扩展理论预测的 G ，实际上，因为运动， G 沿 AC 曲线变化，同时 R 也不再是平面应变时的水平线（ $R = G_{IC}$ ），当 $G < R$ 时，裂纹可能止裂；若 $G \geq R$ ，则裂纹继续扩展。

在实际情况中，如果外荷载非常大，计算的结果使裂纹驱动力 G 始终大于阻力 R ，裂纹扩展直到结构破坏为止。在工程设计中，可以人为地提高 R 值，如提高材料韧性；或者在裂纹前方增加韧性较高的条板材料，裂纹扩展到此板条前面时将有可能止裂；或者在裂纹前面增加加肋板，提高截面的厚度，如图 4-8 所示。这种机械止裂的方法在工程上行之有效，但是在连接部位，也会萌生新的裂纹源。

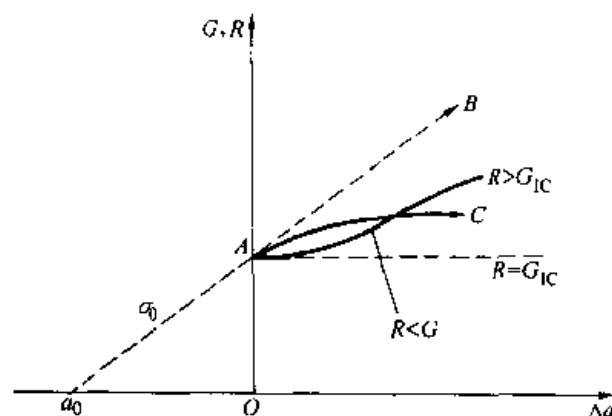


图 4-7 裂纹驱动力与阻力关系

在管道工程中,为了阻止沿纵向扩展的裂纹,止裂构件采取厚钢环的形式,沿纵向间隔地布置在管道的外侧;另外一种形式的止裂构件是沿管道纵向间隔地局部加厚管壁,其目的是降低裂纹后面管壁的张开位移;还有一种形式的止裂构件是在管道截面上间隔地采用更高韧性的管壁材料,如加在管与管连接处。这些止裂构件的作用,主要是降低裂纹驱动力的值,或者是提高局部截面的材料断裂韧性,它们将限制裂纹在管道上的扩展,降低事故的危害程度。

对于含孔边裂纹的板,工程上经常采用铆接加劲环,以降低被加劲板的应力强度因子,如图 4-9 所示。

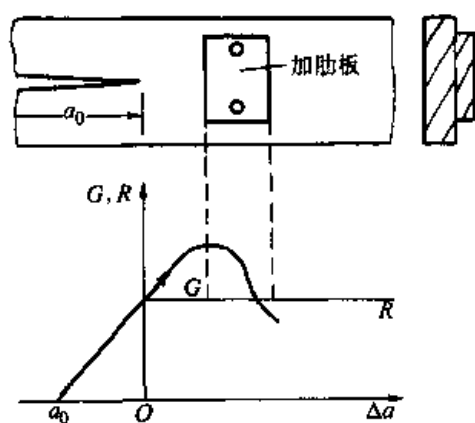


图 4-8 裂纹前面增加加肋板

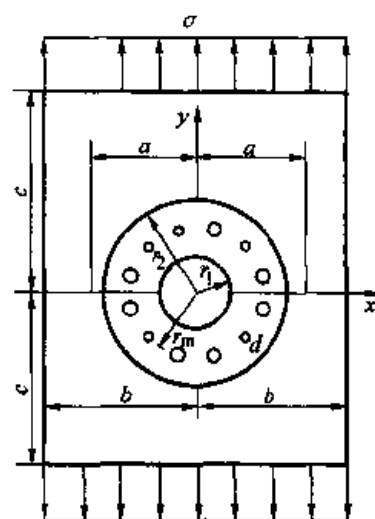


图 4-9 在含孔边裂纹的板上施加铆接加劲环

参考文献 [7] 分别采用解析变分和数值方法给出了该问题的解答,如图 4-10 所示,每一象限包括 L 个铆钉孔。 $\bar{K}_I$ 为无量纲应力强度因子,由第 2 章表 2-1 的表达式给出

$$\bar{K} = K_I / (\sigma \sqrt{\pi a}) \quad (4-22)$$

由于施加了加劲环, 显著降低了应力强度因子的值; 当铆钉个数增加时, 对 $\bar{K}_I$ 也有一定的影响。

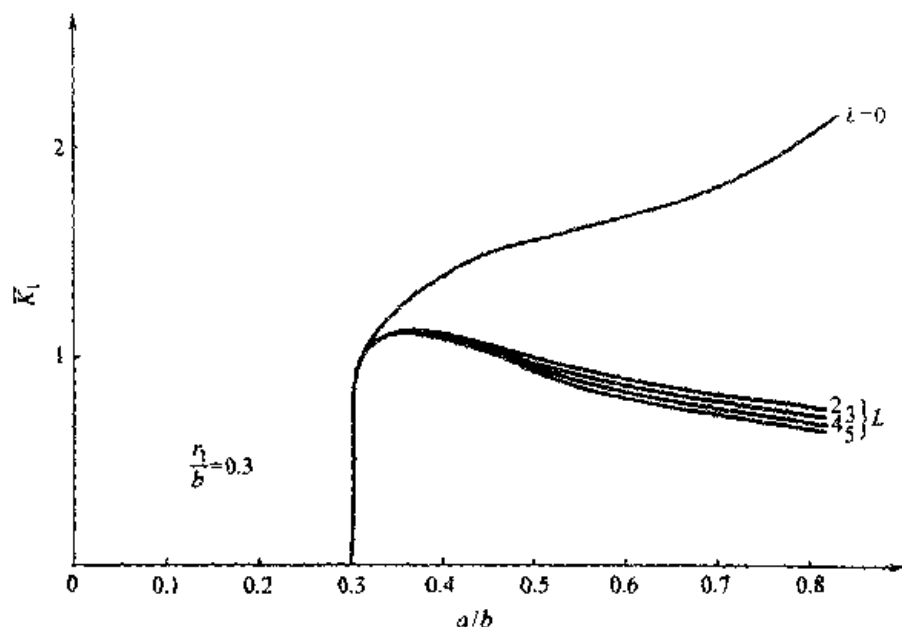


图 4-10 加劲板的 $\bar{K}_I$ 与 a/b 关系曲线

4.7 小结

本章讨论了引起裂纹扩展的物理和化学机制, 列举了引起开裂的环境因素和应力腐蚀裂纹, 给出了疲劳裂纹扩展速率的计算公式。针对等幅和变幅交变应力作用下的裂纹扩展寿命, 给出了分析方法和计算公式。追根溯源, 防止裂纹的起裂是第一道防线; 作为防止裂纹扩展的第二道防线, 本章中提出了工程中常用的止裂分析方法和措施。

尽管荷载是时间的函数, 如不引起显著的惯性效应, 为准静态裂纹扩展。断裂静力学与断裂动力学的主要区别在于断裂过程中动能所占内能的比例, 表征参量是, 若动能与应变能为同一量级, 且所占内能的比例不可忽略, 则为动态问题。快速裂纹扩展问题是动态问题。关于断裂动力学的内容将在第 6 章中讨论。

4.8 习题

- 4-1 举例描述能量变化, 说明静态与动态断裂问题的区别。
- 4-2 比较和说明疲劳理论中的 Miner (迈因纳) 线性累积损伤理论在裂纹扩展寿命估算

中也是成立的。

4-3 比较材料力学中影响疲劳强度的几点因素,如应力集中、尺寸和表面粗糙度等,说明其对疲劳裂纹寿命的影响,并提出提高疲劳裂纹寿命的主要措施。

4-4 举例说明止裂构件的设计和应用,如钢制或塑料压力管道、钢制船板、钢筋混凝土梁或柱构件等。

4-5 就本章中提出的防止裂纹起裂和扩展的两道防线展开进一步的论述。

第5章 断裂韧度的实验和分析

5.1 常规韧度测试简介

工程上采用的常规韧度测试方法包括摆锤冲击试验、落重试验 DWT (Drop Weight Test)、落重撕裂试验 DWTT (Drop Weight Tear Test)、动力撕裂试验和宽板试验等。不同试验方法得到不同的表征参数,用于对材料的韧性进行评估。摆锤冲击试验是使摆锤将带有一定形状切口的标准试样冲断,以摆锤冲断切口前后的能量损失来表征材料的冲击韧度。落重试验是落锤以不同的高度落下,使简支平板受到不同应力的作用。当应力相当于材料的屈服强度时,可以求得试样开裂时的最高温度,称为零韧度温度或无塑性转变温度。

在断裂力学发展起来之前,上述方法成为工程上韧度测试的主要方法。但是,它们不是具有明确定义的断裂实验,存在着一些明显的不足:①未考虑材料厚度的影响,厚度对切口和裂纹端部的应力状态有影响,是尺寸效应的重要因素;②未考虑加载速度的影响,不同强度水平的材料对加载速率的敏感性差别很大;③没有考虑切口尖端曲率对应力集中的影响,显然,V形比U形切口吸收较少的能量。

由于断裂力学的发展,提供了材料的 K_{IC} 、 J 阻力曲线和 CTOD 阻力曲线等新的断裂力学韧度性能的测试指标,弥补了常规韧度测试方法的不足,为工程应用提供了可靠的断裂判据和设计依据。

5.2 断裂韧度的测试

如前所述,对于线弹性或小范围屈服的 I 型裂纹试样,裂纹尖端附近的应力-应变状态完全由应力强度因子 K_I 所确定。 K_I 是外载荷 F 、裂纹长度 a 及试样几何形状的函数。由 $K_I = K_{IC}$ 的裂纹失稳扩展条件,在实验室测试 K_{IC} 一般保持裂纹长度 a 为定值,而令荷载逐渐增加使裂纹达到临界状态,将此时的 F 和 a 代入所用试样的 K_I 表达式即可求出 K_{IC} 。 K_{IC} 是环境温度和材料厚度的函数,与外荷载、裂纹长度及试样几何形状无关。

摆锤下的三点弯曲试验是中间下面含缺口的简支梁受到来自上面的冲击荷载作用,如图 5-1a 所示。它经常被用来测量金属材料的断裂韧度,即能量变化。

其优点是试验简单，加工制作方便。但是，由于裂纹可扩展的长度较短，且裂纹扩展速度远远高于摆锤的锤击速度，所测量到的能量并不全部耗散于裂纹扩展。因此，不能确定动态裂纹扩展时材料的断裂韧度。

紧凑拉伸试验是采用纵向开口的紧凑型试件，在力加载或者位移加载情况下，测量材料的断裂韧度，如图 5-1b 所示的双悬臂梁试件。其优点是裂纹可扩展距离较长，适用于低强度材料的疲劳裂纹扩展和 K_{IC} 试验。

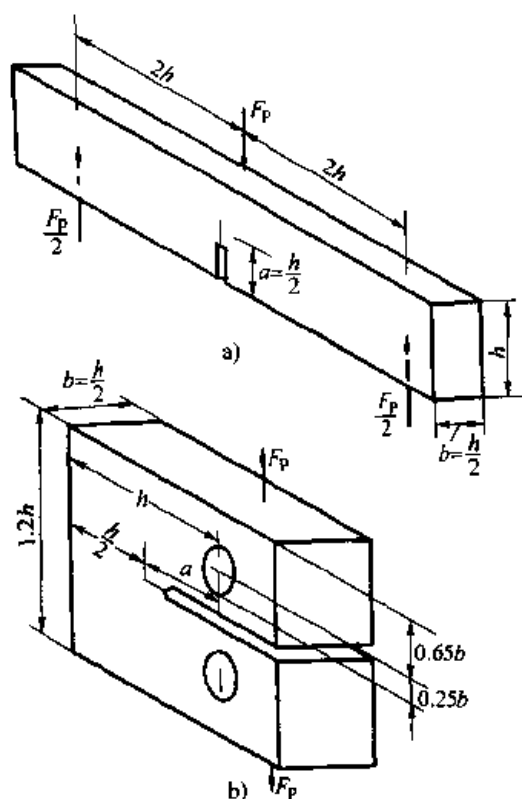


图 5-1 三点弯曲和紧凑拉伸试验的推荐试件

5.3 阻力曲线 K_R — Δa 的测试

构件在发生裂纹扩展时，具体过程并非完全类似。对于处在纯平面应变情况下的高强度材料而言，起裂后不需要增加荷载就能使裂纹扩展，从而使构件丧失承载能力；但是其他情况并非如此，起裂后如欲增长裂纹，必须增大荷载，此时的裂纹扩展是稳定的，构件并未丧失承载能力。因此，就后者而言，起裂并不意味着结构的失效。对这些裂纹扩展行为的预测，可以通过研究裂纹扩展阻力曲线来完成。

阻力曲线反映材料抵抗断裂的性质。研究起裂后结构承载能力的问题就是剩余强度问题，较成熟的研究方法是阻力曲线法。目前，裂纹扩展阻力曲线是通过试验获得的，本节将给出理论上的证明，进一步利用理论阻力曲线给出结构的剩

余强度。

首先, 绘制阻力曲线, 如图 5-2a 所示, 试件所提供的阻抗应力 σ_R 与裂纹扩展量 Δa 的关系曲线, 它表示使裂纹扩展 Δa 时所需之应力。阻抗应力曲线与试件形状及尺寸有关。为此, 我们利用应力强度因子公式, 将 $\sigma_R = \sigma_R(\Delta a)$ 关系曲线转化成为 K_{IR} 与 Δa 的关系曲线, 如图 5-2b 所示, 它表示使裂纹扩展 Δa 时所需之应力强度因子。由应力强度因子与能量释放率的关系也可以给出 G_R 与 Δa 的关系。

K_{IR} 、 G_R 与 σ_R 有如下的关系

$$K_{IR} = \sigma_R(\Delta a) \sqrt{\pi(a_0 + \Delta a)} \cdot \eta \quad (5-1)$$

$$G_R = \frac{1}{E_1} K_{IR}^2 = \frac{1}{E_1} \sigma_R^2(\Delta a) \pi(a_0 + \Delta a) \cdot \eta^2 \quad (5-2)$$

当应力水平确定后, K_{IR} 与 Δa 的关系曲线, 如图 5-2b 所示。对于一定的板厚, 这些阻力曲线反映出材料抵抗断裂的能力。

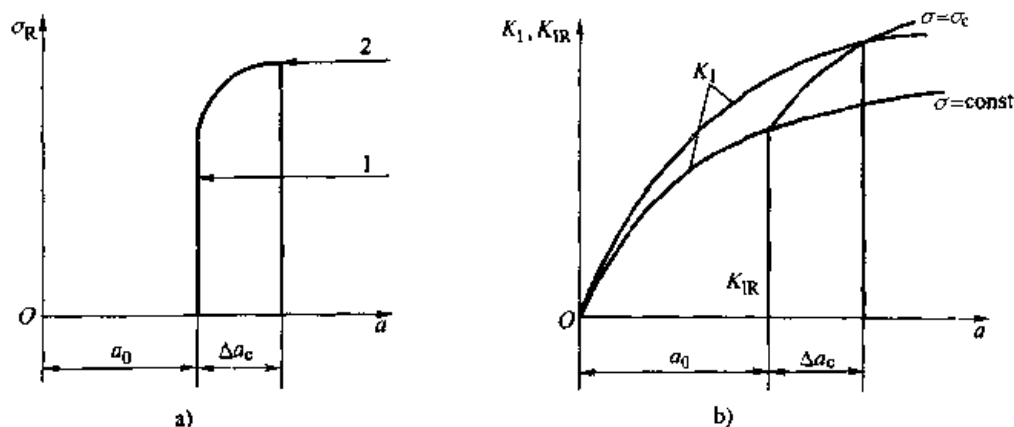


图 5-2 裂纹扩展阻力曲线

a) 试件阻抗应力 σ_R 与裂纹扩展量 Δa 的阻力曲线

b) 使裂纹扩展 Δa 时所需应力强度因子的动力曲线与阻力曲线的关系

然后, 应用应力强度因子 K_I 和能量释放率 G 与裂纹扩展长度的关系, 绘制以 σ 为参数的动力曲线, 如图 5-2b 所示。图中表示当荷载量值为 σ , 裂纹尺寸为 a 时, 荷载所提供的驱动应力强度因子 K_I 和能量释放率 G , 他们之间的关系为

$$K_I = \sigma \eta \sqrt{\pi a} \quad (5-3)$$

$$G = \frac{1}{E_1} K_I^2 = \frac{\pi a}{E_1} \sigma^2 \eta^2 \quad (5-4)$$

给定不同的 σ 值, 即可得到 K_I-a 、 $G-a$ 曲线族。对于各向同性材料, 每族曲线均与材料性质无关。

最后, 我们讨论临界状态与临界荷载, 在阻力曲线与动力曲线族之间存在着两种关系:

(1) 当荷载比较小时, 动力曲线与阻力曲线相交。在交点处, 由图 5-2b 可

见动力曲线的斜率小于阻力曲线的斜率，即

$$\frac{\partial K_I}{\partial a} < \frac{dK_{IR}}{d(\Delta a)} \quad (5-5)$$

同时，当裂纹做真实扩展时，会有

$$\frac{dK_I}{da} = \frac{\partial K_I}{\partial a} + \frac{\partial K_I}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{da} = \frac{dK_{IR}}{d(\Delta a)} \quad (5-6)$$

当动力曲线与阻力曲线相交时，应力随裂纹尺寸的增长而增长，式 (5-6) 成为

$$\frac{d\sigma}{da} = \left(\frac{\partial K_I}{\partial \sigma} \right)^{-1} \left[\frac{dK_{IR}}{d(\Delta a)} - \frac{\partial K_I}{\partial a} \right] > 0 \quad (5-7)$$

从而，裂纹是稳定地扩展，即处于亚临界扩展状态。

(2) 当荷载增长到一定数值时，动力曲线与阻力曲线相切。在切点处，两条曲线的斜率相等，因此有

$$\frac{\partial K_I}{\partial a} = \frac{dK_{IR}}{d(\Delta a)} \quad (5-8)$$

同时，式 (5-6) 仍然成立。当动力曲线与阻力曲线相切时，应力则不随裂纹尺寸的增长而增长，得到

$$\frac{d\sigma}{da} = \left(\frac{\partial K_I}{\partial \sigma} \right)^{-1} \left[\frac{dK_{IR}}{d(\Delta a)} - \frac{\partial K_I}{\partial a} \right] = 0 \quad (5-9)$$

从而，裂纹扩展处于临界状态。与动力曲线和阻力曲线之切点所对应的荷载称为临界荷载或者剩余强度。

当然，也可以应用能量释放率动力曲线与阻力曲线的相切条件决定临界荷载或者剩余强度，此时的相切条件为

$$\frac{\partial G}{\partial a} = \frac{dG_{IR}}{d(\Delta a)} \quad (5-10)$$

遵循前面的思路，读者不妨给出式 (5-10) 的证明。

5.4 J 积分的实验量测

当裂纹以稳态扩展时，一个随裂纹尖端同步运动的观察者无法察觉其周围面积域上场变量的变化，这些变量将不随时间变化，而仅为坐标的函数。对稳态扩展或准静态少量扩展时，J 积分数值上等于总势能对裂纹长度的导数，即

$$J = - \frac{\partial \Pi}{\partial a} \quad (5-11)$$

因此，发展了 J 积分的实验量测方法。

J 积分延性断裂韧度是指弹塑性 I 型裂纹试件，裂纹端点附近区域应力一应变场强度力学参量 J 积分的某些特征值。测量 J 积分的根据是 J 积分与变形功之间的关系。

考虑图 5-3 所示的一般二维试件, 其应变能 U 和总势能 Π 分别为

$$U = \int_0^{\Delta} F d\Delta, \Pi = U - F\Delta = - \int_0^F \Delta dF \quad (5-12)$$

式中, F 与 Δ 互为功共轭, 分别代表了广义力和广义位移。对确定的试件形式, 可实测 $F-\Delta$ 曲线。由式 (5-11), 可得到 J 积分的实验量测公式

$$J = - \left[\frac{\partial U}{\partial a} \right]_{\Delta} = - \int_0^{\Delta} \frac{\partial F}{\partial a} d\Delta$$

$$J = - \left[\frac{\partial \Pi}{\partial a} \right]_F = - \int_0^F \frac{\partial \Delta}{\partial a} dF \quad (5-13)$$

通过上述公式可由多个试件来测量 J 积分。

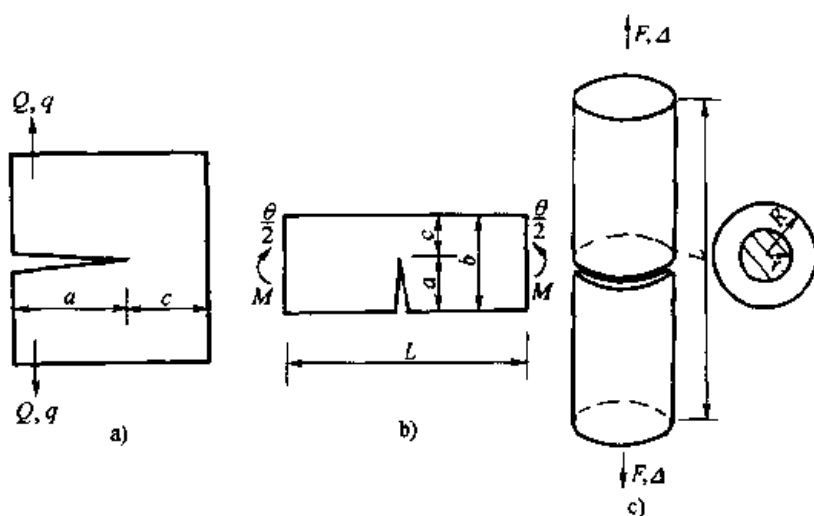


图 5-3 各种试件的 J 积分实验量测

a) 深缺口紧凑拉伸试件 b) 深缺口短梁 c) 深缺口圆柱形拉棒

在深缺口的情况下 (即 $a > c$ 或 $R > 2r$ 时), 可从上述式出发, 导出适用于图 5-3 中三种构件的深缺口简化公式。对于图 5-3a 所示的深缺口紧凑拉伸试件有

$$J \approx \frac{2}{c} \int_0^q Q dq \quad (5-14)$$

式中, c 为韧带长度。对于图 5-3b 所示的深缺口短梁有

$$J \approx \frac{2}{c} \int_0^{\theta} M d\theta \quad (5-15)$$

式中, M 与 θ 分别为作用于梁两端的弯矩和转角。对于图 5-3c 所示的深缺口圆柱形拉棒有

$$J \approx \frac{1}{2\pi r^2} \left[3 \int_0^{\Delta} F d\Delta - F\Delta \right] \quad (5-16)$$

式中, r 为缺口处半径; F 与 Δ 分别为轴力与伸长。由单个试件的载荷一位移曲线和式 (5-14) ~ 式 (5-16), 可实验量测 J 积分值。

5.5 阻力曲线方法测量 J 积分

我国 GB/T 2038—1993 标准中规定采用绘制 J_R 阻力曲线来确定金属材料的延性断裂韧度。通过前一节的描述, 这是一种多个试件测量 J 积分的方法, 能够同时得到几个 J 积分值, 满足工程实际的不同需要。其优点是无须判定起裂点, 能够达到较高的实验精度。

J_R 阻力曲线是指相应于某一裂纹真实稳定扩展量的 J 积分值与该真实裂纹扩展量的关系曲线。在标准中规定测定一条 J_R 阻力曲线至少需要 5 个有效试验点, 故一般采用 5~8 个试件。对按规定加工并预制裂纹的试件加载, 记录荷载一位移 ($F-\Delta$) 曲线, 适当掌握停机点以使各试件产生不同的裂纹扩展量, 注意最大扩展量不超过 0.5mm。测量各试件的裂纹扩展量 Δa , 计算相应的 J 积分, 即裂纹扩展阻力 J_R , 对试验数据作回归处理得到 J_R 曲线。 J_R 阻力曲线的位置高低和斜率大小代表了材料对于起裂和亚临界扩展的抗力强弱。这一优点是其他 J 积分测试方法所不具备的。 J_R 阻力曲线的测试步骤和具体方法见国家标准 GB/T 2038—1993。

5.6 CVN 夏比冲击实验

CVN (Charpy V-Notch) 实验又称三点弯曲夏比冲击实验, 这是一种传统的评价材料断裂韧度的实验方法。它通过摆锤式冲击实验机对含 V 形缺口的小型试件的冲击破坏实验测量在此过程中的耗散功, 即夏比冲击功, 来评价材料的断裂韧度。该实验简便易行, 且有大量的数据积累, 因此在防止结构脆性破坏或延性裂纹扩展的评价上得到广泛的应用。

实验装置和参数示意图如图 5-4 所示。我国标准 GB/T 229—1994 和美国标准 ASMM E23—1996 规定试样标准尺寸为 $10\text{mm} \times 10\text{mm} \times 55\text{mm}$, 缺口深度为 2mm。

图 5-5 给出了某种控轧钢的 CVN 冲击能量随温度的变化, 由图可见, 随着

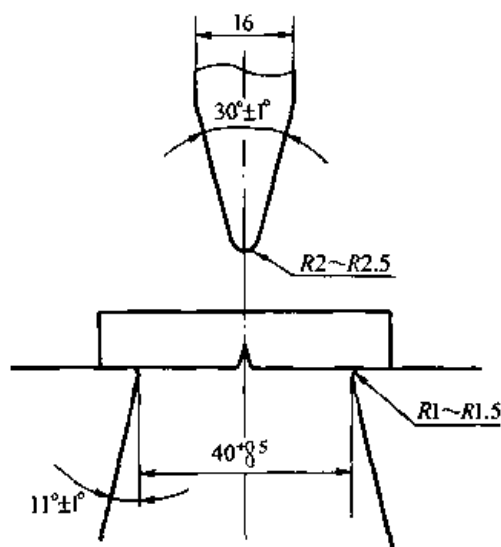


图 5-4 CVN 实验装置示意图

温度的升高, CVN 冲击能量提高, 反映出材料韧度的提高。由于在脆性断裂行为中冲击韧度值远小于韧性断裂的冲击韧度值, 因而当环境温度接近或低于材料的韧脆转化温度时, 测得的 CVN 值会明显降低。图 5-6 中的系列试样经历了韧脆断裂过程的转变, 很明显, 低温呈脆性断裂, 温度升高呈韧性断裂, 混合断裂介于二者之间。一般定义 SA 为韧性断裂所占断口面积比, 85% SATT 表示韧性占 85% 断裂面积对应的转化温度。

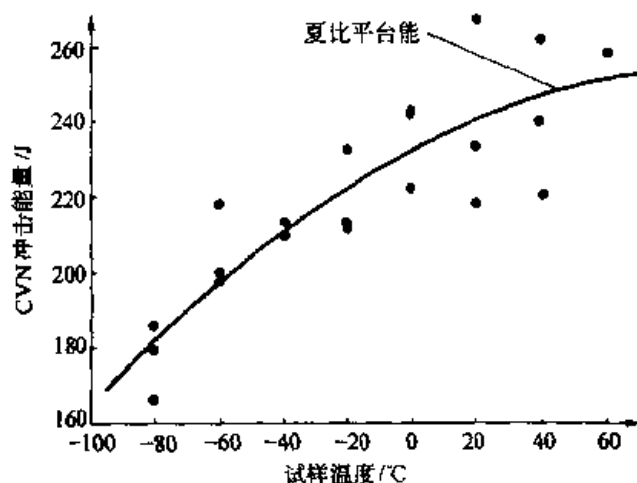


图 5-5 动态断裂韧度随温度的升高而增大

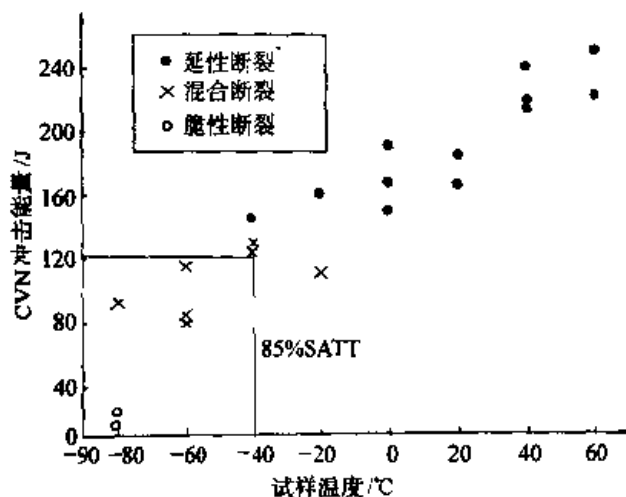


图 5-6 温度变化引起钢材断裂的韧脆转变

断口分离的发生情况与温度有关。随着试样温度的升高, 当钢材成分中的马氏体/贝氏体层达到其上台能时, 断口分离会逐渐减少直至消失。分离对上台能的影响是: 钢材中分层越薄, 韧性断裂的抗力越低。因此, 材料中分离多时, 其韧度比在高温下无分离的相同材料的韧度低。

夏比冲击实验的缺点是摆锤的冲击速度远远低于实际裂纹的扩展速度，同时由于试件厚度偏薄，使得测到的 CVN 能量不能真实地反映裂纹扩展过程中受到的材料韧性的影响。近年来人们开始注意选择不同的韧度测定实验以提高止裂评价的准确性。在这种背景下，DWTT 实验得到了广泛的重视与应用。

5.7 DWTT 落锤撕裂实验

落锤撕裂实验 DWTT (Drop Weight Tear Test) 于 1953 年被美国海军用于根据断口形貌确定铁素体钢的韧脆转变温度。研究表明，近年来也用于评价材料的断裂韧度。同 CVN 实验相比，它的试样尺寸较大，锤刃更为厚重，因而要求试验机具备更高的冲击能量。对于高韧性钢制管道而言，基于 DWTT 实验的止裂预测比 CVN 实验更接近实测值。图 5-7 和图 5-8 分别表示 DWTT 的试样标准和断口形貌。我国标准 GB 8363—1987 和美国标准 ASMM E436 规定试样外形尺寸为 $300\text{mm} \times 75\text{mm}$ ，缺口深度为 5mm ，厚度即为原板厚度。

实验证实，对于具有上台能的控轧钢进行的实验中，标准 DWTT 实验比夏比冲击实验在评价延性裂纹扩展行为上有更好的对应关系。但对于高韧度的淬火回火钢，标准 DWTT 试样由于在起裂过程中吸收了大量的功，致使裂纹扩展的应变速率过低而与真实扩展状况不符。采用静态预制裂纹 DWTT 试样或双试样 DWTT 法是解决这一问题的两种方案。

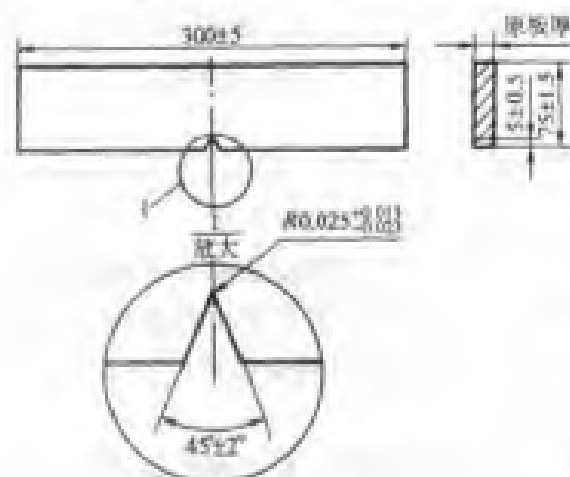


图 5-7 DWTT 试样尺寸标准

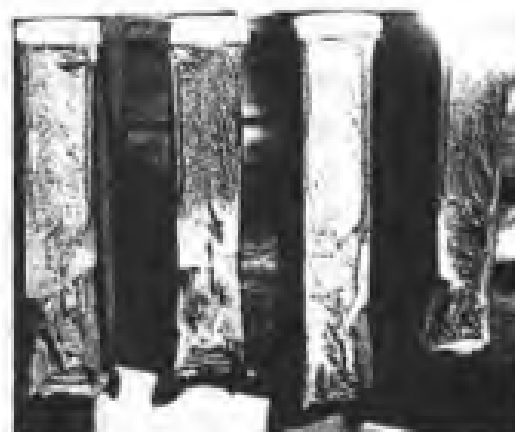


图 5-8 落锤撕裂实验断口形貌

在预制裂纹 DWTT 实验中，起裂功由于预开裂纹的原因基本上被消除了。在双试样 DWTT 实验中，采用了 V 形槽 DWTT 试样，这种试样对 V 形缺口根据实际应用的要求进行了修正，在后端加开了凹槽。两次实验的开槽深度不同，以其 DWTT 功的差作为最终评价的依据，有效地抵消了起裂功。这样实验得到

的 DWTT 功只有裂纹扩展功，能够很好地估计延性裂纹的扩展。

与 CVN 实验类似，DWTT 冲击韧度也随温度的升高而增加。图 5-9 给出了与图 5-6 相对应的具有上台能的控轧钢材标准 DWTT 吸收功与温度的变化关系。DWTT 试样和夏比试样的厚度差异导致了两幅图 85% SATT 不同。

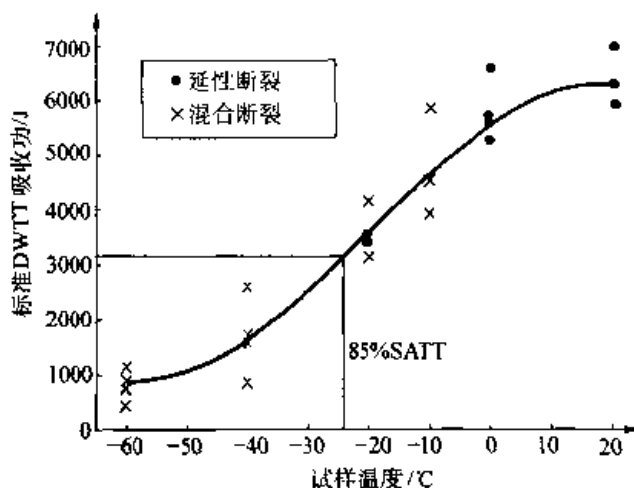


图 5-9 不同温度下 DWTT 冲击能量值

5.8 关于 CVN 与 DWTT 实验的讨论

CVN 实验是被广泛采用的测定钢材断裂韧度的方式。近 20 年来的研究工作表明，就高韧性钢而言，基于 DWTT 实验的结果比 CVN 实验更准确。对于这种现象成因的解释一般基于以下几种观点：

(1) 锤击速度。CVN 和 DWTT 实验的锤击速度均小于全尺寸实验裂纹的扩展速度，相比之下 DWTT 实验的锤击速度更高，更接近真实状态。

(2) 尺寸效应。CVN 实验标准试样厚度小，使止裂韧度预测发生偏差；而 DWTT 实验测定止裂韧度一般采用全厚度试样，这与它用于评价韧脆转变温度时一致，裂纹的断裂路径比夏比试样更长，因此完全剪切撕裂破坏可以像全尺寸断裂行为那样得到充分的发展。

(3) 缺口形状。DWTT 试样的尺寸比 CVN 试样宽阔，利于调整缺口形状和性质，使实验结果趋于精确。除采用预开裂试件或双 V 形槽试件的方法消除起裂功以外，缺口的角度和脆性都对实验结果有一定的影响。

(4) 试验机容量。CVN 和 DWTT 试验机的过剩能容量可以有很大的不同，通常 DWTT 设备的过剩能容量是相同的 CVN 设备的两个数量级以上。一般认为仪器容量相当于最高韧度样品能量的 5 倍。在此范围之内，过剩能量的多少是影响 CVN 和 DWTT 实验断口形貌和韧度数值的最主要因素。

从实用的角度来看, 应该建立同种材料的夏比吸收功和 DWTT 功之间的大致对应关系。

Wilkowski 对老式控轧钢, 包括有无上台能的情况做了检验, 得到标准 DWTT 韧度和夏比韧度的对应关系, 即

$$d_s = 3c_{KV} + 0.63 \quad (5-17)$$

日本 HLP 委员会在大量试验基础上针对淬火回火高韧性钢进行了调整, 即

$$d_s = 5.93h^{1.5}C_{KV}^{0.544} \quad (5-18)$$

在上两式中, d_s 表示标准 DWTT 吸收功的相应值; d_s 表示标准 DWTT 韧度值, 即单位面积的 DWTT 吸收功; C_{KV} 和 c_{KV} 分别表示全尺寸试样的夏比冲击功和冲击韧度值, 后者为单位面积的夏比冲击功; h (mm) 为壁厚。

根据清华大学与西安石油管材所 2001 年的实验数据修正了式 (5-18) 的系数, 得到

$$D_s = 3.5h^{1.5}C_{KV}^{0.6} \quad (5-19)$$

图 5-10 将式 (5-17) ~ 式 (5-19) 预测的对应关系同真实实验结果做了对比。可以看到对于相近的 CVN 韧度预测结果, 实际的 DWTT 功从低到高在大范围内分布。

由于 DWTT 实验和 CVN 冲击实验存在根本区别, 实验结果受试验机过剩容量、断口分离情况、起裂功比例不同、尺寸效应、锤击速度差异等因素的直接影响, DWTT 实验和 CVN 实验结果之间对应关系的分散性不可避免。总结二者之间近似的对应关系, 目的是给通过 DWTT 韧性的止裂预测提供更多的实测参考。

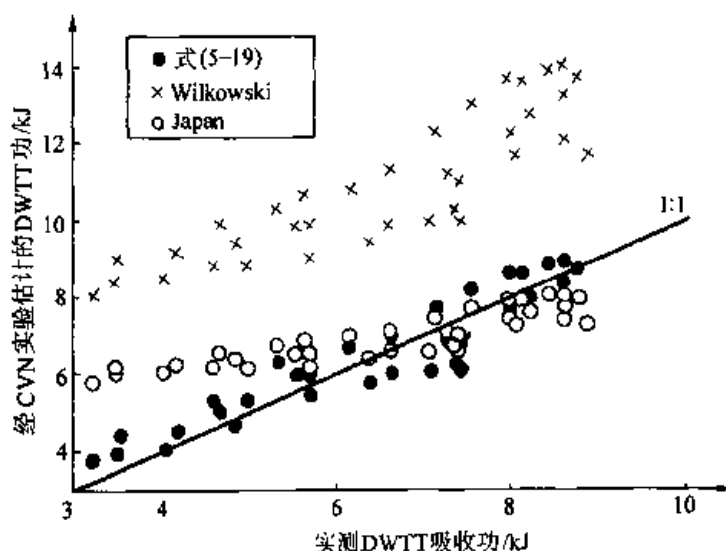


图 5-10 通过夏比冲击能量估计标准 DWTT 吸收功

5.9 双试件 DWTT 法测定 $(CTOA)_c$

裂纹张开角度 $(CTOA)_c$ 是材料的断裂韧性，可以通过摄像机从实物裂纹扩展的照片上观测得到，也可同 CVN 或 DWTT 实验建立联系。Wilkowski 分别建立了基于 CVN 和 DWTT 吸收功的 $(CTOA)_c$ 经验算法，模型如图 5-11。另一种方法是通过测定作用于试件上的总功，从裂纹扩展能的角度计算 $(CTOA)_c$ 。

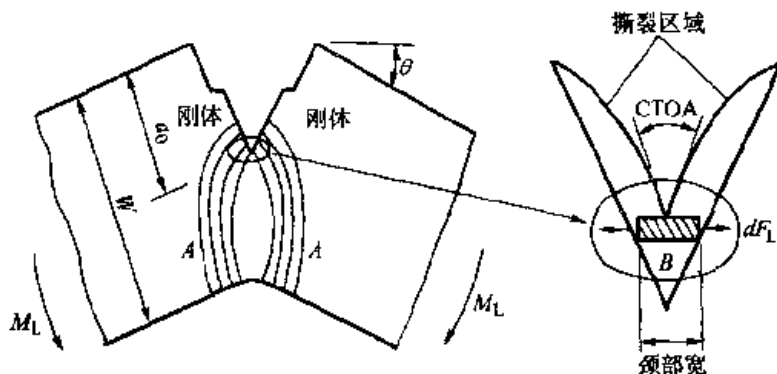


图 5-11 $(CTOA)_c$ 实测模型

Wilkowski 从实验归纳了夏比冲击韧性和 $(CTOA)_c$ 之间的关系

$$(CTOA)_c = \frac{k}{\sigma_{fd}} \cdot c_{KV} \quad (5-20)$$

式中， k 是待定系数； σ_{fd} 是动态屈服应力 (MPa)； $\sigma_{fd} = 1.3\sigma_s = 0.65(\sigma_s + \sigma_u)$ ； σ_s 为屈服点； σ_u 为抗拉强度； c_{KV} 是单位面积的夏比冲击韧度 (J/mm^2)。

比较常用的 $(CTOA)_c$ 实验室测定是双试样 DWTT 法。美国西南研究院 (SwRI) 发展了这一模型，测得的 $(CTOA)_c$ 表示如下

$$(CTOA)_c = \frac{180 \cdot 2571 \cdot (d_C^{a_1} - d_C^{a_2})}{\pi \cdot \sigma_{fd} \cdot (a_2 - a_1)} \quad (5-21)$$

式中 d_C^a 为槽深为 a 的 V 形槽 DWTT 韧度 (J/mm^2)； a_1 、 a_2 为 V 形槽深度 (mm)。

大量的实验表明，在高韧性钢的冲击实验中，裂纹成长大约一个壁厚以后 $CTOA$ 即达到稳定状态，稳态扩展持续到初始韧带宽度的 40% 为止。夏比 CVN 实验的韧带宽度尚不足一个壁厚，断裂行为难以得到持续稳定的发展。

双试样 DWTT 法测量 $(CTOA)_c$ 因其简便易行和结果可信被广泛采用。表 5-1 列出了一种国产 X70 管材的力学性能的 DWTT 测试结果，X70 管材的工作和材料参数取内压力 $p = 10MPa$ ，外直径 $D = 1118mm$ ，壁厚 $h = 14.7mm$ ，弹性模量 $E = 2.1 \times 10^5 MPa$ 。根据式 (5-21) 估算了断裂韧度 $(CTOA)_c$ 值，这些数值与文献上结果基本一致。

表 5-1 1550mm×14.7mmX70 板材强度

	头部		中部		尾部	
	实测	平均	实测	平均	实测	平均
屈服点/MPa	615	606	610	594	610	588
	593		582		582	
	623		590		584	
	592		594		575	
抗拉强度/MPa	705	705	740	735	695	690
	705		725		682	
	707		739		691	
	704		734		691	
动屈服应力/MPa	852		864		831	
(CTOA) _{max} (°)	9.98		9.87		10.2	

在临界状态下, 最大的延性裂纹扩展驱动力等于材料的延性裂纹扩展阻力, 即 $(CTOA)_{\max} = (CTOA)_c$, 这是评估裂纹扩展或者止裂的准则之一。可以采用数值的方法计算 $(CTOA)_{\max}$, 如有限元方法; 也可以采用经验公式, 如文献中给出的估算管道裂纹扩展中 $(CTOA)_{\max}$ 的公式

$$(CTOA)_{\max} = C \left(\frac{\sigma_h}{E} \right)^m \left(\frac{\sigma_h}{\sigma_s} \right)^n \left(\frac{D}{h} \right)^q \quad (5-22)$$

式中, σ_h 是初始管道压力下的环向应力, $\sigma_h = pD/2h$; σ_s 是材料的屈服点; E 是钢材的杨氏模量; p 是输送压力; D 是管道外直径; h 是管道壁厚。C、m、n 和 q 是待定的常数, 本例给出为: $C=106$, $m=0.753$, $n=0.778$, $q=0.65$ 。

5.10 影响断裂韧度与阻力曲线 $K_R-\Delta a$ 的因素

在断裂力学中, 构件裂纹起始扩展时的临界应力强度因子, 即断裂韧度, 可以用来预示含裂纹构件的剩余强度, 它的量值取决于试件厚度、试验温度和晶粒尺寸等, 其中对断裂韧度起决定性的因素是试件厚度。

5.10.1 试件厚度对断裂韧度的影响

试件类型确定后, 需要确定试件的厚度, 再根据厚度选取其他尺寸。由于试件厚度是影响裂纹尖端应力场状态的重要因素, 因此, 它影响材料的断裂性能。图 5-12 描述了试件厚度 δ 与材料断裂韧度 K_{IC} 或者 G_C 的关系。

当 δ 很小时, 试件裂尖附近处于平面应力状态, 断口形貌为斜剪型; 随着 δ 的增加, 平面应力状态向平面应变状态过渡; 在试件超过一定厚度之后, 材料将

完全处于平面应变状态。平面应变断裂韧度是 K_{IC} 的稳定值，即只有当厚度达到一定程度之后， K_{IC} 才趋于稳定，得到有效的数值。试验结果表明，在一定的范围内，较薄的试件具有较高的断裂韧度，随着试件厚度的增加，材料的断裂韧度值将逐渐减小，最终趋于一个恒定的较低极限值，如图 5-12 所示。

当 δ 为任意厚度时，可以采用如下表达式来描述一般情况下断裂韧度 K_{IC} 与板厚 δ 的变化关系，即

$$K_{IC} = \xi \delta^{1/2} e^{-\kappa \delta} + K_{IC}(1 - e^{-\kappa \delta}) \quad (5-23)$$

式中 ξ 和 κ 为材料常数。 K_{IC} 为平面应变的断裂韧度。对式 (5-23) 采用极限分析：

当 $\delta \rightarrow 0$ 时， $e^{-\kappa \delta} \rightarrow 1$ ， $(1 - e^{-\kappa \delta}) \rightarrow 0$ ，则 $K_{IC} \rightarrow \xi \delta^{1/2}$

当 $\delta \rightarrow \infty$ 时， $e^{-\kappa \delta} \rightarrow 0$ ， $(1 - e^{-\kappa \delta}) \rightarrow 1$ ，则 $K_{IC} \rightarrow K_{IC}$

由此可见，式 (5-23) 完全能够描述材料在各种状态下的断裂韧度与试件厚度的关系，式 (5-23) 所表示的理论曲线如图 5-13 所示。曲线初始段的斜率与材料常数 ξ 有关。对于不同的材料而言，式 (5-23) 中的 ξ 和 κ 具有不同的数值，其求解过程为：对于所研究的材料选取若干种试件厚度 δ 分别进行试验，获取它们所对应的断裂韧度。然后，根据获得的相应厚度下的断裂韧度值，使用式 (5-23) 进行最小二乘拟合，以获取材料常数 ξ 和 κ 以及断裂韧度 K_{IC} 。

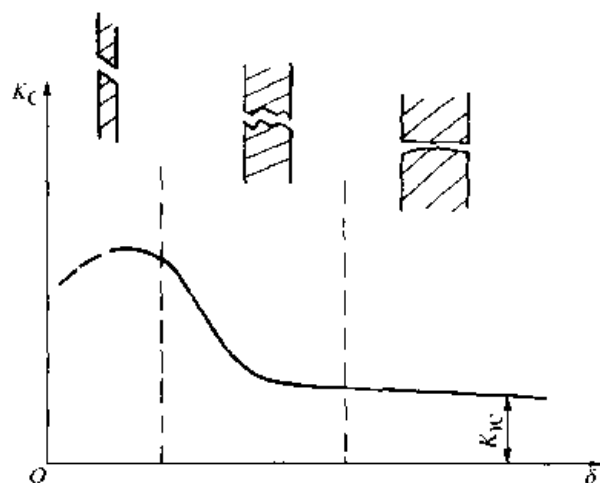


图 5-12 试件厚度对断裂韧度的影响

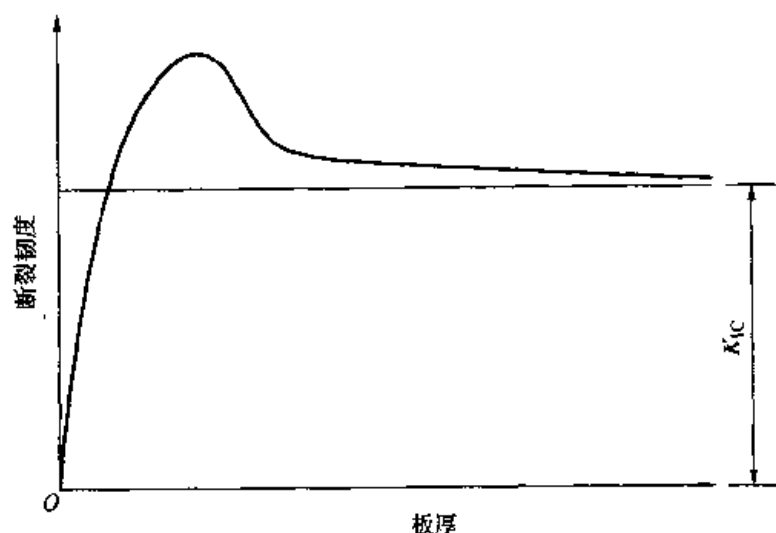


图 5-13 断裂韧度与试件厚度关系的理论曲线图

此外, 裂纹长度还需要满足小范围的屈服条件, 以使由线弹性断裂力学解出的应力强度因子 K_I (I 型) 有足够的工程精度。为了保证裂端塑性区尺寸远小于试件本身的尺寸, 实现小范围屈服的条件, 对试件的韧带宽度 ($b-a$) 也提出了具体的要求, 见图 5-14, 要求裂纹长度 a 、试件厚度 δ 和韧带宽度满足

$$a, \delta, (b-a) \geq 2.5 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (5-24)$$

式中, σ_s 为材料的屈服点。

所谓厚度必须达到一定的尺寸, 并非说越厚越好。不同的厚度对断裂韧性影响各异, 随着厚度增加, 在裂纹附近形成了三向应力状态, 降低了引起材料进入塑性状态的最大切应力 $\tau_{\max}$ (由强度理论可知, $\tau_{\max}$ 为最大与最小主应力差值的一半), 导致了材料延性的降低。无论是从应力或应变的观点来看, 材料厚度增加过多, 会降低材料的延性, 易产生脆性破坏。

5.10.2 试件厚度对阻力曲线的影响

图 5-15 给出铝合金薄板材的四种厚度情况下的阻抗应力 σ_R 与裂纹扩展量

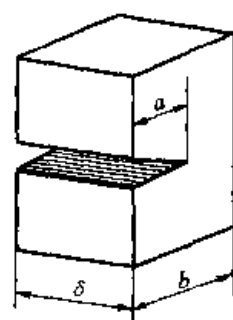


图 5-14 试件的几何尺寸

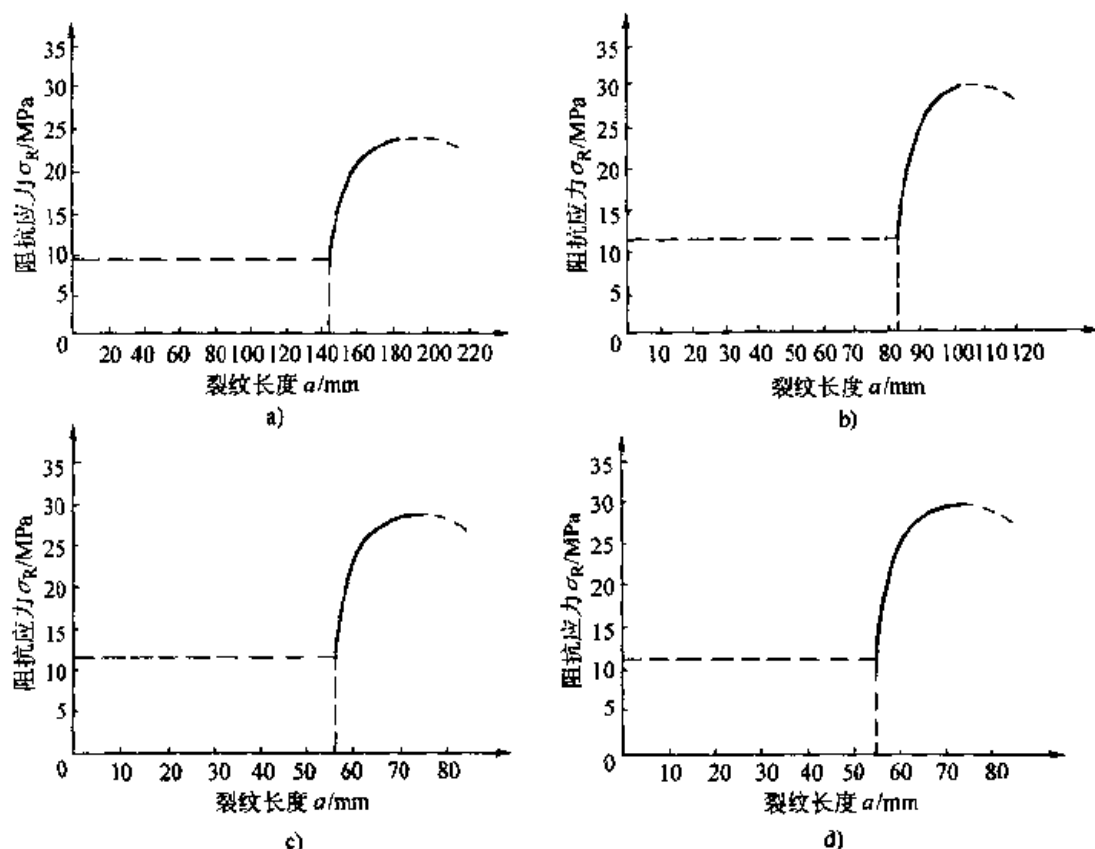


图 5-15 四种厚度情况下的铝合金薄板材的阻抗应力 σ_R 与裂纹扩展量 a 的关系曲线
a) 板厚 2mm b) 板厚 4mm c) 板厚 6mm d) 板厚 10mm

a 的关系曲线, 它表示使裂纹扩展所需之应力, 即断裂韧度。随着厚度的增加, 阻抗应力上升到稳定的数值。从图 5-15 中可以看出曲线均存在极值点, 极值点对应的裂纹尺寸就是临界裂纹尺寸 a_c 。这也进一步验证了式 (5-9) $d\sigma_R/da = 0$ 的条件与裂纹扩展阻力曲线和动力曲线相切的条件是一致的。

在每一种厚度的板材情况下, 分别选取不同的初始裂纹长度, 可以得到此板厚的 σ_R-a 曲线族, 进而得到此板厚的剩余强度图。图 5-16 给出铝合金薄板材的四种厚度情况下的剩余强度图, 可见随着初始裂纹长度的增长, 板材剩余强度不断降低。

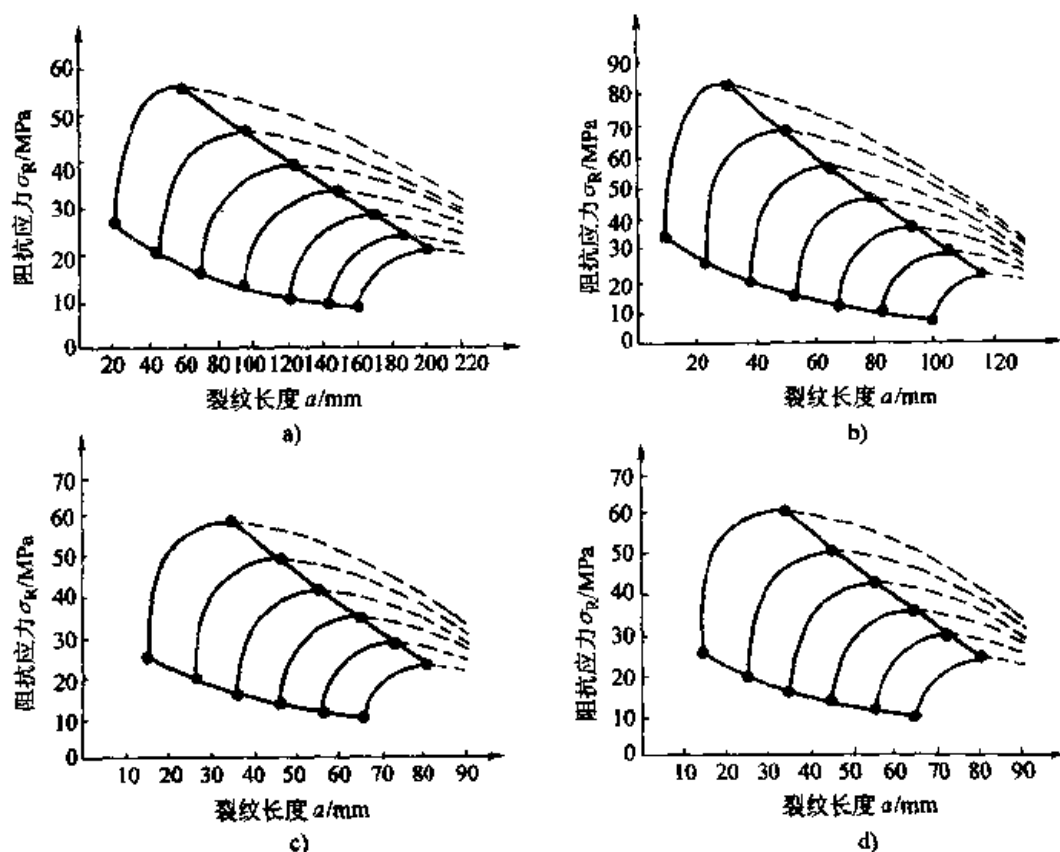


图 5-16 铝合金薄板材的四种厚度情况下的剩余强度图

a) 板厚 2mm b) 板厚 4mm c) 板厚 6mm d) 板厚 10mm

5.10.3 温度对断裂韧度的影响

钢材在低温下变脆, 由此引发许多断裂事故。例如, 在 1912 年 4 月 15 日发生的泰坦尼克 (Titanic) 号豪华游轮冰海沉船事故大概是近几个世纪以来最惨烈的海难之一, 使 1500 多人丧生。过去, 人们认为事故的起因是由于冰山在船体上划开了一道长裂纹。然而, 在 1985 年, 当船体残骸最终被水下机器人发现时, 并没有发现这道长裂纹。通过分析由机器人所采集的船体钢材样本, 人们对这次海难的原因得到了与以前不同的认识。

低等级的钢材，特别是含有大量杂质，例如碳夹杂，在低温下易变脆性。美国科学家认为，泰坦尼克号的船体钢板是在那天晚上在低于 0°C 的大西洋海水中变脆的，当它以每小时 22 海里的速度撞到冰山上时，船体不是被冰山划开一道长口子，而是生成了一个迅速扩展的裂纹，海水进入船舱使船体沉没。如果钢材在如此低温下仍能保持足够韧性，裂纹则有可能不扩展，流入船体的海水可能很少；且允许更多的时间使救援船到达出事地点，挽救更多的生命。

因此，为了避免材料发生脆性破坏，应当尽量降低材料的延—脆转变温度。

5.10.4 晶粒尺寸对断裂韧度的影响

类似铁和碳钢材料，脆性破坏一般始于晶粒位错滑移。当材料达到屈服点 σ_s 时，发生晶粒的滑移和晶粒尺寸的变化。当温度降低时，屈服点 σ_s 将提高，断裂应力将降低。晶粒尺寸越小，材料的韧性越好。相对于韧性为零的晶粒尺寸的值是很小的，即晶粒必须小到避免材料的脆性。同样，更细的晶粒尺寸能够降低材料的延—脆转变温度。当然，这一转变温度值越低越好，以使材料不易进入脆性。因此，晶粒尺寸变细将提高材料的屈服和断裂应力，提高材料的韧性。

除了试件厚度、温度和晶粒尺寸之外，影响材料变脆的其他因素还有：高能辐射损伤，因此核反应堆构件更应引起关注；含缺口构件，由此形成三向应力状态，可能约束了材料的塑性流动；高应变梯度引发的脆性，如焊接残余应力等。

5.11 小结

随着断裂力学的发展，提供了材料的 K_{IC} 、 J 阻力曲线和 CTOD 阻力曲线等断裂力学韧性性能的测试指标，弥补了常规材料断裂韧度测试方法的不足，为工程应用提供了可靠的断裂判据和设计依据。

为了测量到裂纹扩展时的有效能量，采用了落重撕裂试验——DWTT，由裂纹扩展时测量到的能量可以推断裂纹张开角度——CTOA。对于钢制管道，这一试验可能得到最为近似的材料断裂特征。由计算得到的最大张开角度与试验结果的 CTOA 比较，评估压力管道裂纹的扩展和止裂。关于裂纹张开位移的测量，在我国国家标准 GB/T 2358—1994《金属材料裂纹尖端张开位移试验方法》给出了单试样法和测定 CTOD 阻力曲线的方法。

试件厚度、温度和晶粒尺寸，是影响材料韧性的主要因素。为了避免材料发生脆性破坏，应当选择合适的材料厚度，尽量降低材料的延—脆转变温度。晶粒尺寸越小，材料的延性越好。因此，晶粒尺寸变细能够提高材料的屈服和断裂应力，提高材料的韧性。

5.12 习题

5-1 叙述各种常规韧度试验的方法,说明所度量材料韧度数值的表征参数的物理意义。

5-2 应用式(5-10)能量释放率动力曲线与阻力曲线的相切条件,给出临界荷载或者剩余强度的表达式,讨论裂纹扩展临界状态。

5-3 结合式(5-11)或式(5-13),说明 J_R 阻力曲线 ($F-\Delta$) 所围面积的物理意义。

5-4 叙述材料断裂韧度的断裂力学试验方法,及其表征参数的物理意义。

5-5 叙述 CVN 和 DWTT 的试验过程和原理。

5-6 阐述 CTOA 的几何断裂准则,如何间接和直接得到断裂韧度 $(CTOA)_c$ 。

5-7 论述图 5-12 中断裂韧度与试件厚度曲线上各段曲线的物理意义。

5-8 说明影响断裂韧度的主要因素和如何防止材料发生脆性断裂。

第 6 章 动态裂纹扩展

6.1 断裂动力学问题

断裂动力学是研究惯性效应不能忽略的断裂力学问题，即惯性力必须被考虑进物体的运动方程。物理学家 Mott 于 1948 年开始研究了两类问题：第一类是裂纹静止 (stationary)，而外力随时间迅速变化的问题；第二类是研究恒定外力作用下的裂纹扩展问题 (裂纹的止裂包含在其中)。60 年代，Irwin 对于断裂动力学的问题作了进一步的描述，他将问题划分为六个特殊的研究领域：裂纹速度、裂纹方向、裂纹分叉、止裂、突然起裂和最小断裂韧度，并统一于逐渐断裂 (progressive fracturing) 的概念。到了 80 年代，Kanninen 给予它更广泛的定义：断裂动力学包括荷载和裂纹尺寸迅速变化的所有断裂力学问题，一切涉及裂纹快速起裂、扩展和止裂的与时间有关的边值问题均属断裂动力学的范畴。

对于裂纹起裂研究的目的是为了寻找起裂的原因，实际上只涉及断裂过程中的一个点；而对于裂纹扩展和止裂的研究是在不能阻止裂纹起裂的情况下，寻找避免裂纹扩展引起灾难性破坏的第二道防线，显然涉及的是一个过程，它与裂纹起裂问题的最重要区别之一是裂纹尺寸是一个新的随时间变化的未知函数。由于扩展裂纹形成结构的位移边界条件，即使控制方程为线性的，运动边界问题也是非线性的。因为增加了时间变量，使平衡方程成为运动平衡方程。

由于材料的惯性，荷载是以应力波的形式传播的，而裂纹扩展形成了新的自由边界，应力波与裂纹的相互作用，使动态比准静态断裂的问题复杂的多。如平行于裂纹方向的准静态拉伸荷载并不产生裂端的应力集中，而同一方向的拉应力脉冲传到裂纹尖端时，由于横向惯性效应，裂端将处于 I 型受力状态而起裂。另一方面，材料的动态断裂韧度与加载速率有关。裂纹尖端附近的高应力梯度、荷载的应力波形式和裂纹的快速扩展，增加了动态断裂问题的分析和实验的难度。

6.2 线弹性动态断裂理论概述

在动态荷载作用下，线弹性材料的裂端应力场的表达式为

$$\sigma \approx \frac{K(t)}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta, a) \quad (6-1)$$

若式 (6-1) 中的裂纹扩展速度 $\dot{a}$ 为零, 上式与准静态情况相同, 并且, 角分布函数 $f(\theta)$ 也相同。因此, 仍然可用应力强度因子 K 来描述这个动态场, 其临界值为材料的动态断裂韧性。另一种用于刻画裂纹尖端场的表征参量为能量释放率 G , 即裂纹驱动力。

对于扩展裂纹, 裂端应力场的渐近解仍具有 $r^{-\frac{1}{2}}$ 奇异性, 由于角分布函数与裂纹扩展速度 $\dot{a}$ 有关, 因此, 仍然可用应力强度因子来刻画裂端应力状态。对于 I 型裂纹, G_I 与 K_I 的关系为

$$G_I = A(\dot{a}) K_I^2 / E \quad (6-2)$$

式中, $A(\dot{a})$ 为单调递增函数。

对于更一般的问题, 即非恒定荷载作用和裂纹以非恒定速度扩展的半无限 I 型裂纹情况, 裂端应力强度因子仅与荷载历史、裂纹的当前位置 l 和瞬时扩展速度有关。对于 I 型裂纹, 可以表示为

$$K_I(t, l, \dot{a}) = K(\dot{a}) K_I(t, l, 0) \quad (6-3)$$

其中 $K_I(t, l, 0)$ 为同一荷载在与当前裂纹长度相同的裂纹上产生的应力强度因子, $K(\dot{a})$ 为一个与裂纹的瞬时扩展速度有关的因子, 即

$$K(\dot{a}) \approx (1 - \dot{a}/C_R) / \sqrt{1 - \dot{a}/C_d} \quad (6-4)$$

式中 C_R 和 C_d 分别为瑞利波速和膨胀波速。由式 (6-4) 可见, 裂纹扩展的极限速度为瑞利波速。低于这一速度为亚瑞利波速, 裂纹以亚瑞利波速扩展最为常见, 也常常采用亚音速裂纹来代表亚瑞利波速裂纹。不引起畸变的体波以膨胀波速 C_d 传播, 这种波又称为纵波或者无旋波。不引起体积变化的体波以速度 C_s 传播, 这种波又称为横波、等体积波或者畸变波。他们由材料的弹性常数决定, 即

$$C_d = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (6-5)$$

式中 λ 和 μ 为拉梅常数, ρ 为材料密度, 可知, 它们的比值是泊松比的函数。

瑞利波速 C_R 可通过求瑞利函数的根得到, 即

$$R\left(\frac{1}{C_R}\right) = \left(2\frac{1}{C_R^2} - \frac{1}{C_s^2}\right)^2 + 4\frac{1}{C_R^2}\left(\frac{1}{C_d^2} - \frac{1}{C_R^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{C_s^2} - \frac{1}{C_R^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (6-6)$$

瑞利波速略低于横波的波速, 纵波高于横波的波速。以泊松比 $\nu = 1/3$ 为例, 有 $C_R/C_s \approx 0.9$ 和 $C_d/C_s = 2$ 。

对于有限体, 由裂纹面反射的应力波从边界上再反射回裂纹时, 上述结果不再成立, 由有限边界产生的附加荷载不仅与外荷载及试件的几何尺寸和形状有关, 还与裂纹的扩展历史有关。

6.3 动态裂纹扩展条件

裂纹结构受动载作用下将发生裂纹的起裂和扩展，导致结构破坏或者发生止裂，产生这些过程的条件称为判据。目前，断裂动力学在分析裂纹扩展和止裂问题上应用裂纹约束的概念。从这一概念考虑当裂纹扩展过程中发生止裂，就是使裂纹不能连续扩展，如果

$$G_{\max} = G_d(T, \dot{a}, h) \quad \text{裂纹扩展} \quad (6-7)$$

$$G < G_{\min} \quad \text{裂纹止裂} \quad (6-8)$$

式中，裂纹驱动力 G 为裂纹几何、结构尺寸和荷载强度的函数；材料断裂韧度 G_d 为环境温度 T 、裂纹速度 $\dot{a}$ 和材料厚度 h 的函数。因此，为了防止裂纹扩展事故的发生， G 和 G_d 的相对值为实际应用准则提供了定量的条件。 G 来源于对结构模型的分析与计算，而 G_d 要通过对结构材料的实验来分析确定。式 (6-7) 和式 (6-8) 中 G 和 G_d 的关系构成了裂纹扩展的能量准则，与之类似，裂纹张开角 CTOA 和 $(\text{CTOA})_c$ 的关系构成了裂纹扩展的几何量化准则。

由此，发展了两种分析计算模式：①生成模式 (generation mode)；②扩展模式 (propagation mode)。生成模式就是给定结构的几何尺寸和工作条件，计算裂纹驱动力 G ，通过裂纹扩展临界式 (6-7) 来评估材料断裂韧度 G_d ，这是普遍应用的方法。而扩展模式是通过试验来测量裂纹扩展速度和压力分布，计算分析 G_d ，找到它与裂纹速度之间的关系，分析确定产生裂纹扩展的驱动力。目前，已经发展的有限元程序可以实现这些模拟分析工作。

6.4 失稳断裂的裂纹扩展率

在一般分析中，裂纹扩展速度由实验来测定。Mott 于 1948 年曾用无量纲分析法推导了无限大平板上的裂纹扩展速率。假设平板上的面内位移分量为

$$\left. \begin{aligned} u &= c_1 \sigma a / E \\ v &= c_2 \sigma a / E \end{aligned} \right\} \quad (6-9)$$

这里 c_1 和 c_2 是无量纲的比率数，并且不是时间的显函数。若求速度分量，需对时间求导，式 (6-9) 成为

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= c_1 \sigma \dot{a} / E \\ \dot{v} &= c_2 \sigma \dot{a} / E \end{aligned} \right\} \quad (6-10)$$

由动能的定义

$$E_K = \frac{1}{2} \rho \int (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dx dy \quad (6-11)$$

式中, ρ 为材料密度。将式 (6-10) 代入式 (6-11), 得到

$$E_K = \frac{1}{2} \rho a^2 \frac{\sigma^2}{E^2} \int (c_1^2 + c_2^2) dx dy \quad (6-12)$$

因为是无限大平板, 惟一的几何参数是裂纹扩展长度 a , 因此, 上式的积分须与 a^2 成正比。引入无量纲常数 k , 则式 (6-12) 改写为

$$E_K = \frac{1}{2} k \rho a^2 a^2 \frac{\sigma^2}{E^2} \quad (6-13)$$

而动能的另外一种表达形式为

$$E_K = \int_{a_0}^a (G - R) da \quad (6-14)$$

式中, 积分下限为裂纹刚发生时的裂纹半长度 a_0 ; G 为动态的裂纹驱动力; R 为阻力。在失稳断裂的临界点, 由式 (2-7) 有

$$G = G_{IC} = \frac{\pi \sigma^2 a_0}{E} \quad (6-15)$$

设裂纹扩展后, σ 仍不改变。若不考虑阻力曲线和动态效果, 则阻力 $R = G_{IC}$,

$G = \frac{\pi \sigma^2 a}{E}$, 此式仅适用于裂纹速度 a 远小于声速的情况。因此, 平板的总动能为

$$E_K = 2 \int_{a_0}^a (G - R) da = \frac{\pi \sigma^2}{E} (a - a_0)^2 \quad (6-16)$$

由式 (6-12) 和式 (6-15) 得到

$$a = \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \quad (6-17)$$

这里 $\sqrt{\frac{E}{\rho}} = C_0$ 为弹性波的一维传播速度, 即声速。对于脆性断裂, 由实验测定

$\sqrt{\frac{2\pi}{k}}$ 大约等于 0.38。所以, 通过实验和分析, I 型裂纹扩展速度的表达式 (6-17) 可以写为

$$a = 0.38 C_0 \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \quad (6-18)$$

表 6-1 列出了一些材料的裂纹扩展率。如果材料韧度高一些, 则速度会慢一些。如果钢材是在低温环境下发生脆性断裂, 裂纹可以在 1s 内扩展至 1000m 以上, 可见危害是非常严重的。

表 6-1 材料的裂纹扩展率

材 料	$C_0 / (\text{m/s})$	$\dot{a} / (\text{m/s})$	$\dot{a} / C_0$
玻璃	5200	1500	0.29
钢材 (脆性断裂)	5000	1000~1400	0.20~0.28
人造纤维	1100	400	0.37

对于钢制压力管道, Kanninen 提出了裂纹速度的计算公式, 即

$$\dot{a} = \frac{3}{4} C_0 \left(\frac{h}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6-19)$$

式中, C_0 为弹性波在钢中的传播速度, 近似为 5000m/s; h 和 r 为管道壁厚和平均半径。

例如, 对于厚度为 8mm 和直径为 720mm 的管道, 裂纹扩展速度近似为 550m/s。应用这一速度, 我们可以计算裂纹驱动力, 并且评估断裂韧度。

6.5 裂纹驱动力计算

目前仅有少量的解析解答可以用来分析动态裂纹扩展, 而且还是对材料性能、荷载工况、裂纹几何和运动状态作了许多假定, 因此, 大多数问题不得不依赖于数值分析方法。

6.5.1 节点力释放技术

对于弹塑性材料来说, 在断裂前往往在裂端区, 甚至在更大范围上有相当大的塑性变形, 且伴随着裂端后面的卸载。因此, 起裂后必须克服塑性变形才能发生裂纹扩展, 直到失稳破坏。此时, 作为衡量裂端区应力—应变场强度的力学参量 J 积分和应力强度因子 K 并不是严格有效的。于是, Kanninen 提出了一种更先进的 J 积分—— T 积分, 适合应用于弹塑性材料中的动态裂纹扩展分析。而更为简单的一种, 基于能量变化且适用有限元数值计算的方法是节点力释放技术 (node force release)。

在典型的生成状态 (generation mode) 计算中, 输入信息包括作为时间函数的裂纹位置, 这样, 每一时间步上裂纹前进多少是已知的, 而若干个时间步使裂纹扩展至一个单元。由于有限元的约束是在角点上 (例如 4 节点的壳单元或者平面板单元), 那么, 裂纹沿着单元的扩展被模拟成单元节点力的逐步释放。裂纹驱动力 G , 即在裂端区每单位面积上裂纹扩展引起的能量变化, 可以近似地以节点力做功的形式来计算, 即

$$G = \frac{2}{h\bar{L}} \int_i^{i+\Delta t} F \dot{v}_n dt \quad (6-20)$$

式中, h 是管壁厚度; $\bar{L}$ 是单元沿裂纹扩展方向的长度; Δt 是裂纹扩展一个单元所用的时间; $\dot{v}_n$ 是垂直裂纹扩展方向的节点位移速度; 而 2 是表示裂纹上下对称计算的两个部分。

在式 (6-20) 中, F 是裂纹扩展至单元之间所释放的约束力, 它的大小随着裂纹在单元边界上的位置变化, 表示为

$$F(t) = F_0 \left(1 - \frac{a(t)}{\bar{L}} \right)^c \quad (6-21)$$

式中, F_0 是被释放的单元节点力; $a(t)$ 是裂纹沿单元的扩展长度。

C 的取值有 $1/2$ 、 1 和 2 等, 若 $C=1$, 呈线性变化。

6.5.2 能量平衡方法

另外一种计算裂纹驱动力的方法是利用能量平衡, 对于动态裂纹扩展问题表示为

$$G = \frac{1}{h} \left(\frac{dU_e}{da} - \frac{dU_s}{da} - \frac{dU_k}{da} \right) \quad (6-22)$$

式中, U_e 、 U_s 和 U_k 分别为外力作用在物体上的功、内部的应变能和动能; h 为壁厚 (裂纹宽度); da 为裂纹增长长度。 G 也可以表示为裂纹前后区域外力做功 U_e , 和内部能量变化密度 g 的和

$$Gh = \frac{dU_e}{da} + (g_s + g_k)_f - (g_s + g_k)_b \quad (6-23)$$

式中, g_s 和 g_k 分别代表应变能密度和动能密度, 而脚标 f 和 b 分别代表了裂端的前部和后部。对于裂纹稳态扩展问题, 在远离裂纹前端的平面, 荷载和结构变化较小, 其能量的变化可以忽略; 在裂纹后端的平面, 结构变形趋于稳定。因此, 一般是选择包含裂纹尖端的一个较短的控制区来计算其能量的变化, 分析裂纹驱动力的值。

动态与静态问题的主要区别是惯性力的影响量级是否显著, 而表征参量是动能所占内能的比重, 若动能与应变能为同一量级, 且所占内能的比重不可忽略, 则为动态问题。如聚乙烯天然气管道的开裂模拟分析, 管道直径 0.25m , 壁厚 22.7mm , 内压力 0.311MPa , 当假设裂纹扩展速度为 200m/s 时, 能量随时间变化的情况如图 6-1 所示。图中动能与应变能数值接近, 它们共同组成了内能。外力做功与内能的差值表明在断裂过程中能量不再守恒。快速裂纹扩展问题都是动态问题。

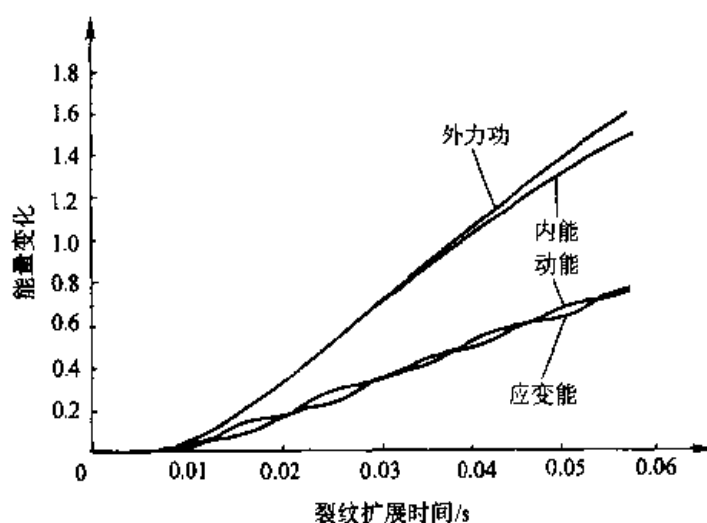


图 6-1 在聚乙烯管道中能量随裂纹扩展的变化情况

对于没有裂纹的情况, 尽管结构承受动态荷载作用, 由于其动能可以忽略不计, 外力功与内能 (主要是应变能) 吻合的非常好, 可以采用相应的静态或准静态解答。能量遵循守恒定律。

由裂纹扩展和止裂的判据式 (6-7) 可知, 由计算得到 $G_{\max}$ 和由试验分析确定 G_d 是解决问题的关键。对于天然气管道上的裂纹扩展问题, 是基于气体/管道/断裂相互作用的有限元模型来模拟真实的结构状态。而裂纹驱动力 G 的值可以用经典的能量平衡理论结合数值计算得到, 或用节点约束力释放的方法。如图 6-2 所示, 对于非常低的裂纹扩展速度, 裂纹驱动力减弱的原因是由于内部气体减压和裂纹后面气体迅速溢出, 形成减压限制区; 然而, 对于非常高的裂纹扩展速度, 驱动力的减弱是因为更多的外力功转换为结构本身的惯性力, 导致动能的提高, 从而耗散了裂纹驱动能量, 形成惯性限制区。所以, G 的峰值对应于裂纹中速扩展; 断裂韧度 G_d 随着裂纹速度的增加缓慢提高。

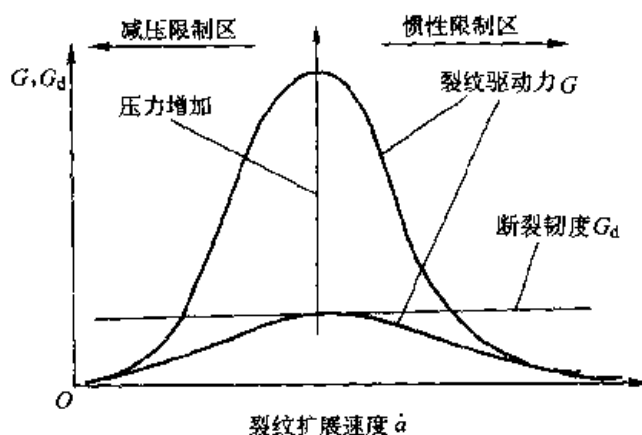


图 6-2 压力管道裂纹驱动力和材料断裂韧度与裂纹扩展速度的关系

6.6 裂纹稳态扩展分析

通常假定处于临界状态的裂纹沿一条平直的路径迅速向前扩展, 它往往起源于结构中存在的初始裂纹或者缺陷, 当结构中可能形成的最大裂纹驱动力等于材料的断裂韧度, 就有足够的能量使得裂纹扩展, 并且达到很长的距离。迅速扩展裂纹的一种特殊情况是裂纹以常速度稳态 (steady state) 扩展, 通过求解运动方程分析裂纹扩展结构中力和位移的变化。

当裂纹后面的观察者与裂纹一起以常速度 a 向前移动时, 他能够观察到裂端附近的应力场没有任何变化。尽管是动态问题, 荷载和位移不再是时间的函数, 其惯性力仅是坐标的函数。因此, 这种稳态分析比瞬态分析相对简单一些。

如图 6-3 所示, 裂纹以常速度 $\dot{a}$ 沿 z 轴负方向迅速扩展。为不失去一般性, 假设在 $t=0$ 时裂纹尖端通过 $z=0$, 如果引入坐标函数 $\xi = z + \dot{a}t$, 裂纹稳态迅

速扩展问题中的力和位移可以表示为

$$f(x, y, z, t) = f(x, y, \xi) \quad (6-24)$$

式中 ξ 为移动的坐标。在裂纹扩展过程中, 这种 x, y, ξ 坐标系将以常速度 a 转换为沿着 ξ 方向, 而裂纹尖端始终保持为坐标的原点。因此, 运动方程中对时间的导数转变为对坐标的导数

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = a \frac{d}{d\xi} \quad \text{和} \quad \frac{d^2}{dt^2} = a^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \quad (6-25)$$

则惯性力可以表示为坐标 ξ 的函数。由于这些变化, 大大简化了对运动方程的求解, 避免了求解瞬态问题时对时间的积分运算。对于给定结构, 只要考虑裂纹扩展 Δa 前后的外力功和内部能量的变化, 应用式 (6-22) 或式 (6-23), 就可以计算裂纹驱动力的数值。

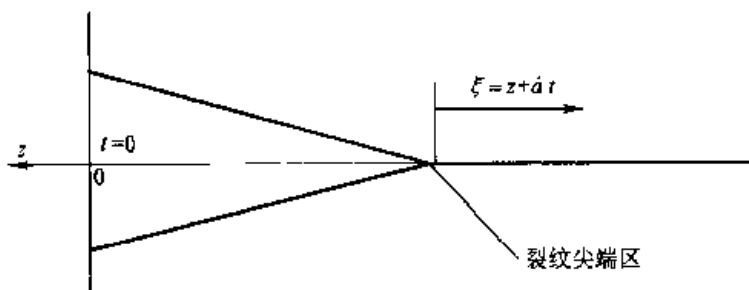


图 6-3 裂纹稳态扩展描述

6.7 动态裂纹的止裂

在工程上, 避免裂纹失稳扩展事故是极为重要的, 这种问题被认为是断裂力学研究领域中最重要的问题之一。研究的目的是保证裂纹驱动力 G (或者 CTOA) 小于材料的断裂韧性 G_d (或者 $(CTOA)_c$), 使由于某些非确定因素引起的微裂纹不至于迅速扩展, 从而使破坏程度限于在尽可能小的局部范围。

裂纹扩展事故的特点一般是裂纹一旦起裂, 就以相对稳定的速度向前扩展, 或者止裂。目前已经普遍认识到, 这种引起裂纹扩展的起裂原因是无法完全预测的, 而且事故的危害是非常严重的, 如天然气管道和核反应堆冷却管路的开裂事故。据美国交通部的统计数据, 从 1970~1984 年, 在 56 万 km 长的石油天然气管线上, 40% 的事故是非确定因素引起的, 60% 的事故来源于腐蚀、材料缺陷、自然灾害、施工误差等。一旦知道了起裂的原因, 就可以采取预防性措施, 但是非确定因素是防不胜防的。因此, 止裂措施被认为是控制这种事故发生的第二道防线。当前, 止裂构件的分析和设计越来越受到关注, 如在第 4 章中所讨论的。

6.8 小结

动态与静态问题的主要区别是惯性力的影响量级是否显著，而表征参量是动能所占内能的比重，若动能与应变能为同一量级，且所占内能的比重不可忽略，则为动态问题。快速裂纹扩展问题是动态问题。

在本章中介绍了如何分析瞬态和稳态的运动裂纹问题。断裂动力学问题的计算需要求解含移动裂纹结构的运动方程，一般有显式和隐式积分两种求解方法。这些可以借助于有限元、有限体积或者有限差分等数值方法完成。

6.9 习题

6-1 举例描述能量变化，说明静态与动态断裂问题的区别。

6-2 举例说明止裂构件的设计和应用，如钢制或塑料压力管道、钢制船板、钢筋混凝土梁或柱构件等。

6-3 试求双悬臂梁试件的动能。

6-4 试求半无限大平板单边裂纹的裂纹扩展率和加速度。

第7章 断裂力学中的若干高等问题

7.1 复合型断裂判据

在实际工程问题中,一般构件的受载情况是复杂的,萌生裂纹的位置和裂纹扩展的方向受到应力分布的影响,裂纹尖端多处于复合型变形状态。例如压力容器的内壁表面裂纹与轴向成交角,在内压作用下是Ⅰ、Ⅱ复合型;又如齿轮外缘常发生的破坏形状类似月偏食的轮廓,这也是Ⅰ、Ⅱ复合型裂纹;再如纤维增强复合材料板为各向异性材料,其裂纹呈锯齿形扩展,也是Ⅰ、Ⅱ复合型裂纹。为了建立复合型裂纹的判据,我们关注的是裂纹起裂的条件和起裂后扩展的方向。为了解决这两个问题,必须确定起裂控制参数,采用不同的控制参数,就形成了不同的断裂判据。

7.1.1 最大周向拉应力强度因子理论

根据线弹性断裂力学,对于平面问题,在裂纹尖端附近,由第2章式(2-12)和式(2-13),应力分量可以写成如下形式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_z &= \begin{cases} 0 & \text{平面应力} \\ 2\nu \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} - 2\nu \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} & \text{平面应变} \end{cases} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7-1)$$

式中, K_I 和 K_{II} 分别为Ⅰ型与Ⅱ型的应力强度因子。

采用坐标变换,将上述应力转变为极坐标下的周向应力

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{K_I}{2} (1 + \cos \theta) - \frac{3K_{II}}{2} \sin \theta \right] \quad (7-2)$$

式中, (r, θ) 是以裂纹尖端为原点的局部极坐标。

最大周向拉应力强度因子理论的基本假设是:

(1) 裂纹沿最大周向拉应力强度因子的方向开裂, 即垂直最大周向拉应力的方向。

(2) 当最大周向拉应力强度因子达到临界值时, 裂纹失稳扩展。显然, 此临界值为材料常数, 即材料断裂韧性, 与 K_I 和 K_{II} 的比值无关。

我们引入一个周向拉应力强度因子 K_θ ,

$$K_\theta = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_\theta = \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{K_I}{2} (1 + \cos \theta) - \frac{3K_{II}}{2} \sin \theta \right] \quad (7-3)$$

于是, 式 (7-2) 可以改写成

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_\theta \quad (7-4)$$

由假设 (1), 开裂角 θ 应由对式 (7-3) 取极大值的条件决定

$$\left. \frac{\partial K_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 K_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} < 0 \quad (7-5)$$

得到

$$\left. \begin{aligned} K_I \sin \theta_0 - K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) &= 0 \\ K_I \cos \frac{\theta_0}{2} (1 - 3 \cos \theta_0) + K_{II} \sin \frac{\theta_0}{2} (9 \cos \theta_0 + 5) &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-6)$$

联立式 (7-6) 中的两式, 即可以确定开裂角 θ_0 。

由假设 (2), 断裂准则是

$$K_{\theta \max} = \cos \frac{\theta_0}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3K_{II}}{2} \sin \theta_0 \right] = K_{\theta c} \quad (7-7)$$

临界值 $K_{\theta c}$ 为材料的断裂韧性。这就是最大周向拉应力强度因子的断裂准则。它的优点是形式简单, 但缺点是不能区分平面应变和平面应力的不同情况。

对于纯 I 型问题, 可以令式 (7-6) 中第 1 式的 $K_{II} = 0$, 得到 $\theta_0 = 0$, 于是由式 (7-7) 得到纯 I 型问题的断裂准则为

$$K_I = K_{\theta c} = K_{Ic} \quad (7-8)$$

对于纯 II 型问题, 可以令式 (7-6) 中的 $K_I = 0$, 从而确定的开裂角为

$$\theta_0 = -70.5^\circ \quad (7-9)$$

如图 7-1 所示。再由式 (7-7) 得到纯 II 型问题的断裂准则为

$$K_{II} = 0.87 K_{Ic} = K_{IIc} \quad (7-10)$$

7.1.2 最小应变能密度强度因子理论

根据线弹性断裂力学, 在裂纹尖端附近的应力分量, 对于平面问题由式 (7-1) 给出, 对于反平面问题由第 2 章式 (2-16) 给出,

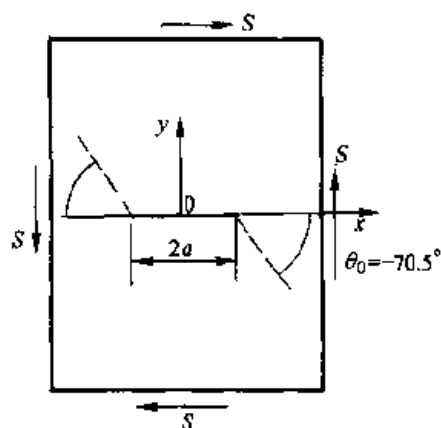


图 7-1 纯 II 型问题的断裂

即

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \tau_{zx} &= -\frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

弹性体内应变能密度 W 可以写成

$$W = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (7-11)$$

式中, G 为剪切模量。

将式 (7-1) 和式 (2-16) 代入式 (7-11), 可得裂纹尖端附近的应变能密度表达式为

$$W = \frac{S}{r} \quad (7-12)$$

其中, S 称为应变能密度因子, 它等于

$$S = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{\text{II}} + a_{22}K_{\text{II}}^2 + a_{33}K_{\text{III}}^2 \quad (7-13)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}a_{11} &= \frac{1}{16\pi G}(1 + \cos\theta)(\kappa - \cos\theta) \\ a_{12} &= \frac{1}{16\pi G}\sin\theta(2\cos\theta - \kappa + 1) \\ a_{22} &= \frac{1}{16\pi G}[(\kappa + 1)(1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)] \\ a_{33} &= \frac{1}{4\pi G}\end{aligned} \right\} \quad (7-14)$$

式中

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{平面应力} \\ 3-4\nu & \text{平面应变} \end{cases}$$

应变能密度强度因子理论的基本假设是:

(1) 裂纹沿最小应变能密度强度因子方向开裂。

(2) 当最小应变能密度强度因子达到临界值时, 裂纹失稳扩展。显然, 此临界值为材料常数, 即材料断裂韧度, 与 K_I 、 K_{II} 和 K_{III} 的比值无关。

由假设 (1), 开裂角 θ 应满足对式 (7-13) 取极小值的条件

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} > 0 \quad (7-15)$$

由假设 (2), 断裂准则为

$$S_{\min} = S(\theta_0) = S_{\min c} \quad (7-16)$$

式中, $S_{\min c}$ 为最小应变能密度强度因子的临界值, 即材料断裂韧度。

采用与上节类似的方法, 对于平面应变情况, 有

$$S_{\min c} = \frac{1-2\nu}{4\pi G} K_{Ic}^2 \quad (7-17)$$

于是, 式 (7-16) 具有如下形式

$$K_{Ic}^2 = \frac{4\pi G}{1-2\nu} [a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 + a_{33} K_{III}^2] \quad (7-18)$$

在纯 II 型问题中, $K_I = K_{III} = 0$, 由式 (7-13) ~ 式 (7-15) 可得

$$\theta_0 = \arccos\left(\frac{1-2\nu}{3}\right) \quad (7-19)$$

将式 (7-19) 代入式 (7-13), 考虑到式 (7-16), 可以给出

$$K_{IIc} = \sqrt{\frac{3(1-2\nu)}{2(1-\nu)-\nu^2}} K_{Ic} \quad (7-20)$$

当取泊松比 $\nu=1/3$ 时, 则有

$$\theta_0 = -83^\circ 37', K_{IIc} = 0.9 K_{Ic} \quad (7-21)$$

这一结果与由式 (7-10) 给出的最大周向拉应力强度因子断裂准则的结果 $K_{IIc} = 0.87 K_{Ic}$ 非常接近。

7.1.3 最大能量释放率理论

按照物理学的观点, 裂纹扩展方向应是有最多能量可释放的方向。对于平面问题, 裂纹尖端附近应力分量的极坐标形式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I (1 + \cos\theta) - 3K_{II} \sin\theta] \\ \sigma_r &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin\theta + K_{II} (3\cos\theta - 1)] \end{aligned} \right\} \quad (7-22)$$

引入记号

$$\begin{aligned} K_{1\theta} &= \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} [K_I (1 + \cos\theta) - 3K_{II} \sin\theta] \\ K_{2\theta} &= \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin\theta + K_{II} (3\cos\theta - 1)] \end{aligned}$$

则式 (7-22) 变成为

$$\sigma_\theta = \frac{K_{1\theta}}{\sqrt{2\pi r}}, \sigma_r = \frac{K_{2\theta}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (7-23)$$

由第 2 章中式 (2-36) 给出的平面应变下应力强度因子和能量释放率 G_{Ic}

之间的关系，并将其推广到极坐标下，得到裂纹沿 θ 方向扩展的能量释放率 G_θ 为

$$G_\theta = \frac{1-\nu^2}{E}(K_{1\theta}^2 + K_{2\theta}^2) \quad (7-24)$$

能量释放率准则的基本假设是：

(1) 裂纹沿最大能量释放率方向扩展，即

$$\left. \frac{\partial G_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \left. \frac{\partial^2 G_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} < 0 \quad (7-25)$$

(2) 当最大能量释放率达到临界值时，裂纹失稳扩展，即

$$G_{\theta_{\max}} = G_\theta(\theta_0) = G_{\theta C} \quad (7-26)$$

此临界值为材料常数，即材料断裂韧性，与 $K_{1\theta}$ 和 $K_{2\theta}$ 的比值无关。

由假设 (1)，开裂角 θ_0 通过下式确定

$$\begin{aligned} K_I^2 \sin \theta_0 (1 + \cos \theta_0) - 2K_I K_{II} (\sin^2 \theta_0 - \cos^2 \theta_0 - \cos \theta_0) + \\ K_{II}^2 \sin \theta_0 (1 - 3\cos \theta_0) = 0 \end{aligned} \quad (7-27)$$

由假设 (2)，断裂准则应该是

$$\begin{aligned} G_{\theta_{\max}} = \frac{1-\nu^2}{4E} (1 + \cos \theta_0) [K_I^2 (1 + \cos \theta_0) - 4K_I K_{II} \sin \theta_0 + \\ K_{II}^2 (5 - 3\cos \theta_0)] = G_{\theta C} \end{aligned} \quad (7-28)$$

采用平面应变下 I 型裂纹应力强度因子和能量释放率之间关系的形式，得到

$$G_{\theta C} = \frac{1-\nu^2}{E} K_{IC}^2 \quad (7-29)$$

从而式 (7-28) 变成

$$K_{IC}^2 = \frac{1}{4} (1 + \cos \theta_0) [K_I^2 (1 + \cos \theta_0) - 4K_I K_{II} \sin \theta_0 + K_{II}^2 (5 - 3\cos \theta_0)] \quad (7-30)$$

这是最大能量释放率准则。

工程上对失稳断裂采用更为简单和偏于保守的判据，将式 (7-24) 改写成

$$K_I^2 + K_{II}^2 \geq K_{IC}^2 \quad (7-31)$$

若再保守一点，可取

$$K_I + K_{II} \geq K_{IC} \quad (7-32)$$

以上两个判据可用图 7-2 表示。前者在 $1/4$ 圆内是安全的；后者在 $1/4$ 圆内接三角形内是安全的。显然，后者比前者更为保守。

类似的推论可以得到三维复合型裂纹的工程断裂判据，其安全区域将是圆球或者椭球域的内部。

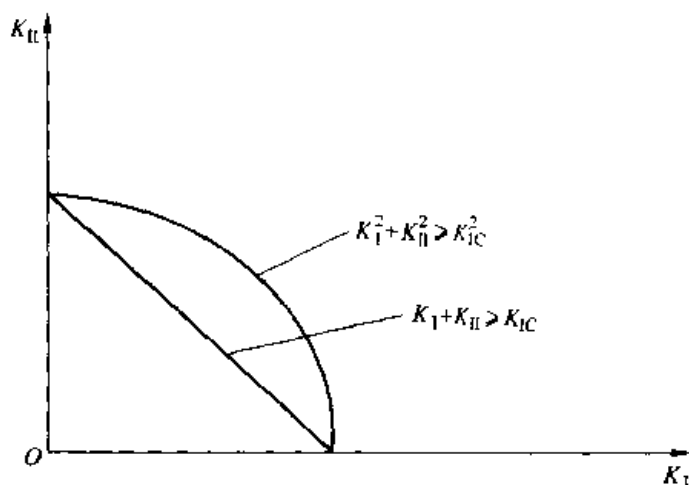


图 7-2 工程复合型断裂判据

7.2 板壳应力强度因子

与平面受力状态的结构相比, 承受横向载荷的板壳是工程中更常见的结构形式。板壳断裂问题有它的特殊性和复杂性, 主要采用 Kirchhoff 板壳断裂理论与 Reissner 板壳断裂理论进行研究。本节将通过平板断裂问题的研究简要介绍这两种断裂理论的基本概念与分析方法以及它们之间的相互区别和联系。我们假设读者已经学习了板壳理论的初步知识。壳体与平板断裂分析方法相同, 但较为复杂。这个专题的系统研究可参阅柳春图和蒋持平的专著。

7.2.1 Kirchhoff 板弯曲断裂

为了研究 Kirchhoff 薄板弯曲裂纹尖端场, 如图 7-3 所示引入裂纹尖端为原点的直角坐标和极坐标系。两坐标系的变换关系为

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad (7-33)$$

Kirchhoff 板理论的挠曲微分方程与平面问题应力函数的控制方程形式上相同, 因此平面断裂问题中一套成熟的方法, 像复变函数法、积分变换法、局部—整体法等都可以应用于分析 Kirchhoff 板的弯曲断裂问题, 一些典型问题已获得了精确解, 如图 7-4 所示, 远处均匀受力含长 $2a$ 裂纹无限大板的弯曲问题, 其裂纹尖端的应力强度因子为:

(a) 远处受均匀弯矩 M^∞

$$K_I = \frac{6\sqrt{\pi a}}{h^2} M^\infty \quad (7-34)$$

(b) 远处受均匀扭矩 M_{xy}^∞

$$K_I = 0 \quad K_{II} = \frac{6\sqrt{\pi a}}{h^2} M_{xy}^\infty \quad (7-35)$$

式中, h 为板的厚度。

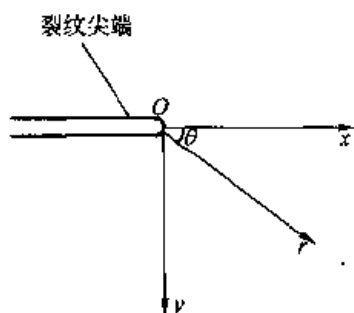


图 7-3 在裂纹尖端的直角坐标与极坐标

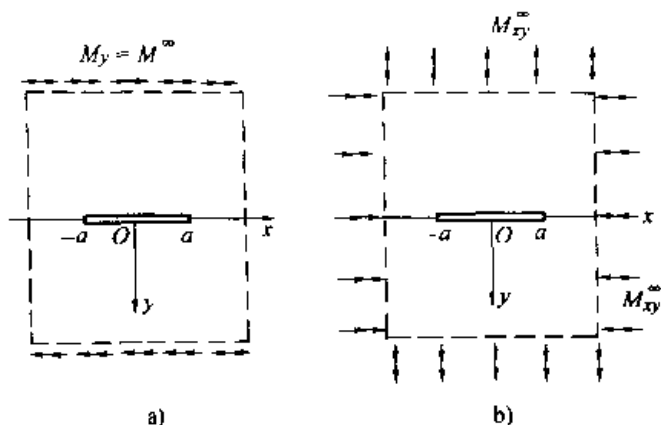


图 7-4 两个典型的板弯曲断裂问题

Kirchhoff 薄板理论在工程中得到了广泛应用, Kirchhoff 薄板弯曲断裂理论也得到更大的发展, 一些应力强度因子手册还专门收录了 Kirchhoff 板弯曲裂纹的应力强度因子公式。

7.2.2 Reissner 板弯曲断裂

对于含裂纹的 Reissner 中厚板, 仍如图 7-3 建立以裂纹尖端为原点的直角坐标与极坐标系。Reissner 板弯曲裂纹尖端附近各应力分量均具有 $r^{-\frac{1}{2}}$ 阶奇异性, 角分布函数均与外载和板的形状无关, 因此可以严格地按照断裂力学中关于张开型、滑开型和撕开型 3 种类型应力强度因子的定义计算 Reissner 板弯曲裂纹尖端的应力强度因子, 即

$$\left. \begin{aligned} K_{\text{I}}(z) &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{\theta}(r, 0, z) \\ K_{\text{II}}(z) &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{r\theta}(r, 0, z) \\ K_{\text{III}}(z) &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{\theta z}(r, 0, z) \end{aligned} \right\} \quad (7-36)$$

式中, z 是从板中面出发沿其法线方向的坐标, 而各个应力分量为

$$\sigma_{\theta} = \frac{12M_{\theta}z}{h^3}, \tau_{r\theta} = \frac{12M_{r\theta}z}{h^3}, \tau_{\theta z} = \frac{Q_{\theta}}{h^3}(h^2 - 4z^2) \quad (7-37)$$

与平面问题和反平面问题裂纹尖端应力强度因子的不同点是 Reissner 板的应力强度因子沿板厚变化, 其分布规律取决于相应之应力的分布规律。张开型 (I 型) 和滑开型 (II 型) 应力强度因子的最大值 K_{I} 和 K_{II} 发生在板的表面, 即 $z = \pm \frac{h}{2}$ 处, 撕开型 (III 型) 应力强度因子的最大值 K_{III} 发生在板的中面, 即 $z = 0$ 处。

可以看到, Reissner 板裂纹尖端三种类型应力强度因子的定义分别与平面和

反平面裂纹的三种对应应力强度因子的定义相同, 裂纹尖端附近应力奇异性阶次相同, 角分布函数也对应相同。不同点是, 平面与反平面裂纹尖端场沿厚度方向均匀分布; 而 Reissner 板弯曲裂纹尖端场较为复杂, I、II 型应力场沿厚度线性分布, 在板面达到最大值, III 型应力场沿厚度呈抛物线分布, 在板中面达到最大值。它们的分布分别类似于板弯曲正应力和切应力的分布规律, 这些特征表明可以方便地研究板弯曲与平面应力的耦合问题。更精确的三维分析显示了采用 Reissner 板理论进行断裂分析的科学性。

7.3 断裂的原子论模型

为了寻找一种容易理解的固体断裂过程, 自然是首先检验材料内部原子化学键的强度。根据材料内部或表面原子局部位错会引起材料屈服和塑性流动的概念, 分析在微观结构中由于裂纹所引起的强度减弱, 得到与观察较为接近的材料断裂强度结果。另外一种方法是采用累积损伤的观点, 评价时间和温度在断裂过程中对材料的影响, 下面将描述这后一种方法。

在任意时刻, 原子化学键断裂概率的演化规律与未断裂概率 n 成比例

$$\frac{dn}{dt} = -kn \quad (7-38)$$

k 为率常数, 即单个键在单位时间内断裂的概率。分离变量得到

$$\frac{dn}{n} = -k dt \quad (7-39)$$

积分式 (7-39), 有

$$\int_{n_0}^n \frac{dn}{n} = - \int_0^t k(\tau) d\tau \quad (7-40)$$

得到

$$\ln \frac{n}{n_0} = -k(t) \text{ 或者 } n = n_0 e^{-k(t)} \quad (7-41)$$

在上式中, 当常数 $n_0 = 1$ 时, 为断裂过程开始时键尚未断裂的比例。对于键断裂的平均时刻 $\bar{t}$ 有

$$\bar{t} = \frac{\int_0^\infty t \cdot n dt}{\int_0^\infty n dt} = \frac{\int_0^\infty t \cdot n_0 e^{-k\tau} d\tau}{\int_0^\infty n_0 e^{-k\tau} d\tau} = \frac{1}{k} \quad (7-42)$$

因此, 键断裂的平均寿命恰好为率常数的倒数。对于键未遭断裂的函数的积分结果如图 7-5 所示。

率常数是随着由热激活引起的应力和温度 T 而变化的, 可以表示为

$$k = k_0 e^{-\frac{E^* - V^* \psi}{RT}} \quad (7-43)$$

式中, E^* 和 V^* 分别是激活能和体积; ψ 是作用在键上的应力; 常数 $R = 8.314 \text{ J/mol}$, 应用分子应力 ψ 考虑宏观作用应力 σ 。由式 (7-42) 和式 (7-43), 得到以朱可夫方程 (Zhurkov's equation) 表示的键断裂时刻, 即材料失效寿命如下

$$t_f = t_0 e^{\frac{(E^* - V^* \sigma)}{RT}} \quad (7-44)$$

式中, t_0 是等于 $1/k_0$ 的常数。

当常温时, 式 (7-44) 简化为

$$t_f = \alpha e^{-\beta \sigma} \quad (7-45)$$

式中

$$\alpha = t_0 e^{E^*/RT}, \beta = V^*/RT$$

朱可夫方程提供了预见材料失效寿命的一种模型。当选择可调常数 t_0 、 E^* 和 V^* 符合试验数据时, 人们发现激活能可能仅为一个原子化学键热裂解能量的一半, 而激活体积比与单一键相关联的体积大几千倍的量级。产生这两个问题的原因是应力在所有键上不是均匀分布的, 在靠近裂纹尖端附近的键上会发生临界应力, 正是它们在断裂的过程中占主导作用。

朱可夫方程预见材料失效寿命的进一步应用是在累积损伤模型中, 讨论应力和温度随时间的变化。采用寿命损伤率为

$$\frac{dt}{t_f} = \frac{dt}{t_0 e^{(E^* - V^* \sigma)/RT}} \quad (7-46)$$

如果假设为线性累积损伤, 当寿命损伤率的总和为单位值时, 可以预见发生了断裂, 其表达式为

$$\int_0^{t_f} \frac{d\tau}{t_f} = \int_0^{t_f} \frac{d\tau}{t_0 e^{(E^* - V^* \sigma)/RT}} = 1 \quad (7-47)$$

【例题】 定向尼龙纤维在常应力速率试验中, 温度为 23°C 常温, 应力仅为时间 t 的函数, 求可能的失效时间

$$\sigma(t) = R_\sigma t$$

式中应力速率 $R_\sigma = 1 \text{ MPa/s}$ 。

解: 应用式 (7-45) 中对 α 和 β 的定义, 式 (7-47) 成为

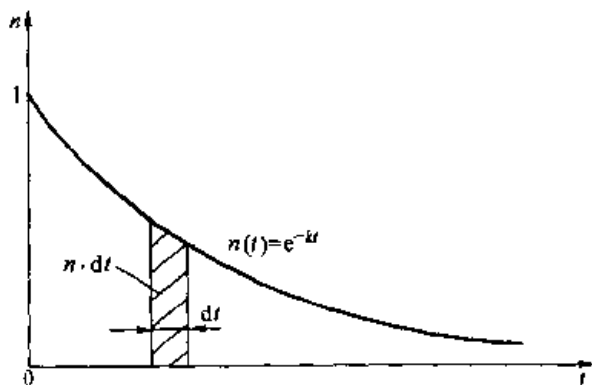


图 7-5 键未断裂的函数的积分

$$\int_0^{t_f} \frac{dt}{\alpha e^{-\beta R_\sigma t}} = \frac{e^{\beta R_\sigma t_f} - 1}{\alpha \beta R_\sigma} = 1$$

式中

$$t_f = \frac{\ln(1 + \alpha \beta R_\sigma)}{\beta R_\sigma}$$

若采用 $\alpha = 2.33 \times 10^{20} \text{s}$ 和 $\beta = 5.04 \times 10^{-7} \text{m}^2/\text{N}$, 计算出 $t_f = 871 \text{s}$, 即失效时间为 871s。

在实际问题中, 累积损伤主要依赖于应力大小, 尤其是最后时刻的荷载对失效时间起到了至关重要的作用。

7.4 小结

本章首先讨论了三种复合型断裂理论, 即最大周向拉应力强度因子理论, 最小应变能密度强度因子理论, 最大能量释放率理论, 并通过解析的方法分别给出了裂纹方向角、断裂准则, 及其复合型应力强度因子。

接着对承受横向载荷的板壳断裂问题, 简明介绍了 Kirchhoff 薄板壳断裂理论与 Reissner 中厚板壳断裂理论, 并给出了各自弯曲裂纹尖端的应力强度因子。

最后问题转到断裂的微观机制, 从微观断裂的原子论模型, 采用累积损伤的观点, 分析时间和温度在断裂过程中对材料的影响, 评估寿命损伤的概率。

总之, 在材料和结构设计中, 选择一种可接受的危险应力状态, 对于设计本身是非常重要的, 同时也是非常困难的, 当涉及到人身安全时, 断裂的概率越小越好。

7.5 习题

7-1 描述复合型裂纹端点区的应力场强度的力学参量有几个, 它们的物理意义是什么?

7-2 说明建立几种复合型断裂判据的理论基础。如何分别计算应力强度因子。

7-3 由式 (7-6) 和式 (7-7) 推导出式 (7-10) 的结果, 即纯 II 型裂纹的断裂准则。

7-4 简要说明 Kirchhoff 薄板壳理论与 Reissner 中厚板壳理论, 包含基本假设与解答。对比各自的弯曲断裂理论, 并给出各自的弯曲裂纹尖端的应力强度因子。

7-5 在例 7-1 中, 若温度改为 42℃ 高温, 其他条件不变, 求定向尼龙纤维在常应力速率试验中的失效时间。

第 8 章 断裂力学在工程中的若干应用

当代断裂力学的繁荣和它在未来强大的生命力正是因为它已深深地根植于现代高科技领域和工程应用。例如,大型电子计算机的硬件条件使我们有可能对复杂的断裂过程进行数值模拟,现代物理学提供的新的实验手段,如高倍电子显微镜、表面分析、高速摄影等现代观测、测量技术使我们能够更深入地研究宏观、细观乃至微观的断裂过程。正是这种对于断裂基本规律的深入认识,有助于发挥断裂力学在工程应用中的理论指导作用。例如,材料增韧和新材料的研制,人工心脏瓣膜等生物材料的开发,核反应堆结构的抗震破坏设计,微电子元件的研究,地质力学与地震预报,采矿与油气开采和输送,航空航天工程的新材料与新结构设计等。断裂力学与现代科学和高技术成果的有机结合,使断裂力学呈现出崭新的面貌。本章仅介绍断裂力学在工程中的若干应用。

8.1 结构安全评定

结构安全评定是宏观断裂力学的主要应用领域。随着结构的大型化和复杂化,随着航空航天事业的飞速发展,它在今天显得尤为重要。各类安全评定规范需要制定、补充和完善,并得到具体实施。违背和忽视安全评定,就会尝到追悔莫及的恶果。例如,1988年1月,美国宾夕法尼亚州匹兹堡附近,一个几乎注满原油的直径36m,高15m的油罐突然垂直开裂,大约 378.5m^3 石油流入附近河中,污染了宾夕法尼亚州、西佛吉尼亚州和俄亥俄州的大量水源。事故由一个穿透壁厚 $2/3$ 的钱币形缺陷引起,使表面裂纹形成穿透裂纹,进一步酿成了扩展裂纹。也有相反的例子,英国北海有一采油平台,水下磁粉探伤发现一条长约1m的裂纹,但精确的断裂力学分析表明,裂纹不会失稳扩展,因此未经处理继续使用,节约了大笔经费。在重要工程中,安全评定是一个关键问题,如果评定标准过于严格会造成经济损失,过于宽松则不能保证安全。正因为如此,世界各国都高度重视无损探伤和含裂纹结构的寿命评估。

8.1.1 三级安全评定体系

根据国际现有的结构安全评定方法,可提出下述三级安全评定体系:

(1) 在工程结构与设备的设计安全评定、验收和在役缺陷评定初审时,应采用简单且偏保守的线弹性结构完整性评定方案,以美国机械工程师学会(ASME)的方法为基础,采用基于应力强度因子 K 的线弹性断裂力学评价方

法, 这样可以对工程结构和设备的制造与安装中的质量保证起严格的监督作用。

(2) 对经济利益重大的安全决策问题, 或对概率很小的超荷载事故工况, 在上述第一道防线不能得到满足且返修或重新制造又耗资巨大时, 可允许按基于弹塑性起裂原则的评定路线做出补充评定。可采用 J 积分作为评定的中心准则。从这两级不同评定方法的综合结果来统筹做出安全决策。

(3) 若上述两种评定方案均不能通过, 且对该设备或部件的判废对某项重大设备起颠覆性作用, 可采用 J 积分作为评定的中心准则和按基于弹塑性裂纹失稳扩展原则的评定路线做出补充评定, 这一评定结果可作为技术权威部门内部掌握的数据。在重大安全决策中可兼顾三级评定的综合结果。

在后两级评定方法中, 以科学依据较强的 J 积分作为控制弹塑性断裂参数的作法已成为国际结构完整性评定的一致趋势。

8.1.2 弹塑性断裂工程估算方法

三级安全评定体系中后两级缺陷评定的关键问题之一在于计算大范围屈服下的 J 积分值, 由此产生了弹塑性断裂工程估算方法。

回顾第 3 章, 对于 $\sigma_\infty < 0.5\sigma_s$ 的小范围屈服情况, 这时可由应力强度因子 K 来计算 J 积分。关于 K 的值可以解析或者数值计算, 根据裂纹几何可以查找有关计算手册和表格, 便于工程师应用。

对于 $\sigma_\infty > 0.5\sigma_s$ 的大范围屈服情况, 需要具体求解弹塑性边值问题。较有代表性的弹塑性本构关系是 Ramberg-Osgood 方程

$$\frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_0} = (1 + \nu) \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} - \nu \frac{\sigma_{kk}}{\sigma_0} \delta_{ij} + \frac{3\alpha_0}{2} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{S_{ij}}{\sigma_0} \quad (8-1)$$

式中出现参照应力 σ_0 、弹性模量 ($E = \sigma_0/\epsilon_0$)、泊松比 ν 、幂硬化系数 α_0 、幂硬化指数 n 共 5 个材料常数。等效应力 σ_e 按 J_2 塑性流动理论的意义来定义, 一般取 von Mises 等效应力 (见第 3 章式 (3-1))。

由于求解计算呈非线性和参数众多, 这类弹塑性边值问题是非常复杂的。因此, 发展了弹塑性断裂工程估算方法。对任意的某一断裂参数 y , 近似有

$$y \approx y_c + y_p \quad (8-2)$$

式中, y 可以是 J 积分 (J)、COD (δ)、加载端位移 (Δ) 等。左端的 y 表示弹塑性本构关系式 (8-1) 中的断裂参数值; 右端 y_c 为小范围屈服下的该断裂参数值, 可以借助现有应力强度因子手册得到; y_p 为纯幂硬化本构规律下的断裂参数值 (见 3.6 节 HRR 场), 可以参考有关文献, 同时需要编制一本全塑性断裂手册。式 (8-2) 中的近似相等关系在极端状态下 (即小范围屈服与全面屈服) 是正确的, 在中度屈服时也得到大量实验结果和数值计算的支持。

美国电力研究院 (EPRI) 汇编了上述断裂参量的计算结果手册, 称为延性断裂手册, 该手册主要包括二维试件构形和典型三维构形。这一工作为将弹塑性

断裂力学理论应用于工程实际提供了方便途径。

8.2 压力管道的裂纹快速扩展和止裂问题

对于管道和容器,由裂纹失稳扩展的情况可知,其扩展速度相当快,在解理脆性断裂时,钢制管道裂纹速度为 $500 \sim 800 \text{ m/s}$,如果在低温的环境下,甚至更快,可达到 1000 m/s 以上;而在延性扩展时,钢制管道裂纹速度可达 $200 \sim 400 \text{ m/s}$,聚乙烯管道裂纹速度可达 $100 \sim 300 \text{ m/s}$ 。根据美国交通部关于美国本土在 $1970 \sim 1984$ 年间 56 万 km 长石油天然气管道上发生事故的统计报告,占发生率 40.5% 的事故源于非确定因素。不像其他的破坏,知道了原因就可以采取措施,预防裂纹的起裂。非确定因素是无法事先估计的,一旦起裂,裂纹可能迅速扩展,或者止裂。许多灾难性的天然气管道破坏事故源于裂纹在管道上的迅速扩展。在北美的钢制天然气输送管道上,曾发生过裂纹扩展达十几公里;而在欧洲的聚乙烯天然气分布管道上也有裂纹扩展达几百米事故的发生。显然,在管道工程中避免这种灾难是极为重要的。这种问题被认为是断裂动力学研究领域中最重要的问题之一。研究目的是在正常使用情况下,要求管道不开裂,或由于某些非确定因素引起的微裂纹不至于迅速扩展,使破坏程度限于尽可能小的局部范围。

当输油或输气管道发生裂纹扩展破坏时,能否止裂,一方面取决于裂纹扩展速度的快慢,另一方面也由管道泄漏引起内部减压的速率来决定。对于输送液体的管道,破裂可以很快地达到减压;而对于输送气体的管道,减压的快慢由裂纹扩展速度和气体在声音中传播的速度来确定。图 8-1 给出理论上的天然气管道在不同裂纹扩展速度下的减压效果。由钢制管道裂纹失稳扩展速度可知,脆性断

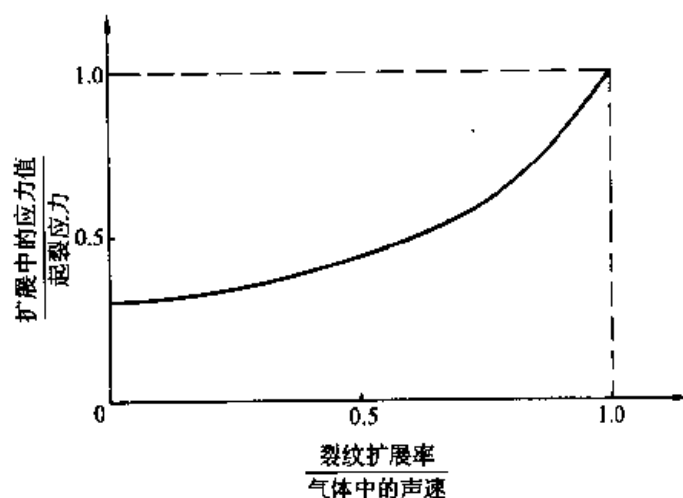


图 8-1 理论上的天然气管道在不同裂纹扩展速度下的减压效果

裂的减压效果很差，延性断裂较好。由图 8-1 可见，周向的止裂应力大约为起裂应力的 0.3 倍。所以应选择韧性较好的材料来制造管道，其抵抗应力腐蚀的性能也比较好，这一点在核反应堆和石油天然气管道设计中非常重要。

许多工程事故是由于流体压力导致了结构开裂，而流体从结构裂纹中释放所产生的裂纹驱动力导致了裂纹扩展。流体压力管道的断裂现象是流体、结构和断裂相互作用又相互影响的过程。当管道上裂纹起裂和扩展时，流体压力直接作用在已开裂的管壁上，为管壁变形提供了运动的力，管壁呈非线性失稳破坏，而裂纹扩展又影响了流体流动，形成了结构上的移动边界。这一流体/结构/断裂相互作用的特点是发展断裂动力学模型的核心问题。这一问题的研究归结为裂纹驱动力 G 的计算和材料断裂韧性 G_d 的实验确定。

$$\text{如果} \quad \begin{array}{ll} G_{\max} = G_d & \text{裂纹扩展} \\ G < G_{d\min} & \text{裂纹止裂} \end{array} \quad (8-3)$$

其中，裂纹驱动力 G 是裂纹长度、气体压力、管道直径和壁厚的函数；材料断裂韧性 G_d 与温度、裂纹扩展速度和壁厚有关。因此，为了防止裂纹在工程管道上扩展事故的发生， G 和 G_d 的相对值为实际应用准则提供了定量的条件。 G 来源于对结构模型的分析计算，而 G_d 要通过对结构材料的实验来分析确定。

针对天然气管道裂纹扩展问题，已经发展了模拟分析的计算程序，使复杂的流体/结构/断裂相互作用问题可由单一的数值计算工具来求解。该程序提供了：①流体动力学的计算，采用有限差分法，包括移动边界条件和广泛的流体性能，如二相流动等；②非线性壳体结构的动力学计算，基于有限元方法，采用了弹—塑性壳单元并具有大变形的能力；③动裂纹扩展的模拟分析；④流体/结构/断裂动力学耦合计算模型。对于直径 0.25 米，外直径与壁厚的比值 SDR11 (SDR - Standard Dimension Ratio) 的聚乙烯 (PE) 天然气管道，图 8-2 展示了应用程序计算的开裂后管道的变形状态，随着裂纹沿管壁上部的纵向扩展，在裂纹后面气体溢出，管壁横向张开，变形越来越大。

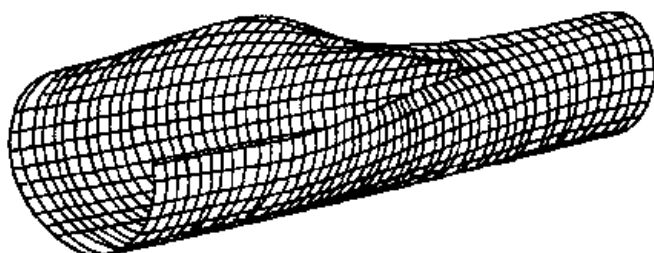


图 8-2 开裂后 PE 管道的变形状态

早期对液体压力管道裂纹扩展问题的分析中，应用应变能变分原理，将裂纹驱动力等效为裂纹前面环向应变能的释放率，Irwin - Conten 发展了裂纹驱动力的计算

$$G_0 = \frac{\pi p_0^2 (D_0 - 2h)^2 (D_0 - h)}{8Eh^2} \quad (8-4)$$

式中, p_0 为初始线压力; D_0 和 h 为管壁外径和壁厚; E 为材料的弹性模量。

对于 SDR11, 壁厚为 0.25m 的 PE 管道, 当裂纹以 175m/s 速度扩展时, 图 8-3 给出了裂纹驱动力 G (气体) 和 G_0 (液体) 与压力的变化关系, G 由模拟管道断裂的有限元程序计算, G_0 由式 (8-4) 计算。随着压力增加, G 和 G_0 的值迅速增加, 而无量纲值 G/G_0 相对变化较小。

由图 8-3 可以看出, 在相同初始线压力的条件下, 气体的 G 远远大于液体的 G_0 。在管道内部, 液体是不可压缩的。在裂纹后面, 液体压力为零。然而, 对于气压管道, 在扩展裂纹的后面, 气体从开裂的管壁溢出, 逐渐衰减至大气压力, 在这一衰减区内, 气体压力继续作用在开裂的管壁上, 发展了潜在的裂纹驱动力。由于气体的可压缩性, 在管道中同样容积的气体能量可以是液体能量的几千倍。正是这内部能量决定了裂纹驱动力的量值, 使得气体压力的 G 远远大于液体压力的 G_0 , 这也正是为什么气体管道的临界压力远远低于液体管道的临界压力。这些已经被实际管道试验所证明。

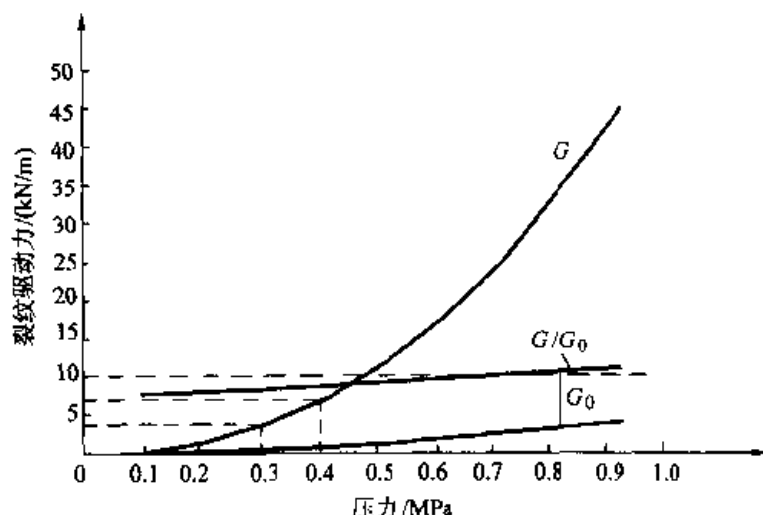


图 8-3 液体和气压管道裂纹扩展驱动力的比较

进入 20 世纪 90 年代后, 随着高强度高韧度天然气管材的应用, 如 X65、X70、X80 等高等级管材钢, 其夏比冲击能量 (CVN) 达到 200J 以上, 一旦裂纹起裂, 呈延性裂纹扩展和止裂的趋势。美国和日本全尺寸管道破坏实验证明, 裂纹起裂的速度虽然很快, 可以达到 300m/s 左右, 但是裂纹速度迅速衰减, 扩展十几米或者几十米后发生止裂。这反映出钢材韧度的提高, 耗散了驱动裂纹扩展的动能, 使能量释放率迅速减弱, 低于材料的断裂韧度。毫无疑问, 这种裂纹在短距离扩展后无外界约束的止裂现象, 由此蕴含的材料高韧度机制, 是天然气输送管道工业的福音。

8.3 核反应堆管道的 LBB 问题

由于应力腐蚀引起核反应堆管道的系统开裂，并产生放射物质的泄露是最严重的事故之一。特别是在小直径的钢管中，经常发生应力腐蚀裂纹，如图 8-4 所示。因此，核电站压力管道的设计和安全评定标准格外引人关注。

LBB 准则 (leak before break)，即破前漏准则，是核电站冷却回路主管道安全评定的重要准则。世界各国在这方面投入了大量的人力和财力，广泛开展研究。在 LBB 研究之前，反应堆的冷却回路管道设计偏于保守，截面尺寸偏大，管道外部设防措施过多，加大了工程的成本。例如，对美国 Beave 谷核电站的轻水反应堆高能管道系统采用 LBB 分析后，使其 128 个防止破坏的附加装置减少到 46 个，仅从工程建造方案上就节约了 50 万美元，若考虑维修和管理的费用可节约达数百万美元之多。如何提出一套经济和安全的设计标准，正是 LBB 方案提出的宗旨。LBB 的设计原则是保证管道在使用寿命内即使出现了小裂纹也不会断开。在局部开裂的管路上所产生的部分物质泄露，可以被仪器检测到，为停机检修提供必要的预警信息。

LBB 评定的关键之一在于裂纹张开面积的计算。该张开面积一方面与断裂力学有关，它对应于还不至于发生失稳扩展的裂纹长度。另一方面，它又与热工和流体力学计算有关，应保证所泄漏出足够的含放射性物质以使用有关探测仪器可查到。核电站的压力管道通常由韧度较好的材料制成。对于 LBB 评定中裂纹张开面积的计算，极限荷载评定方法通常用于韧度较好的中、小直径含短裂纹管

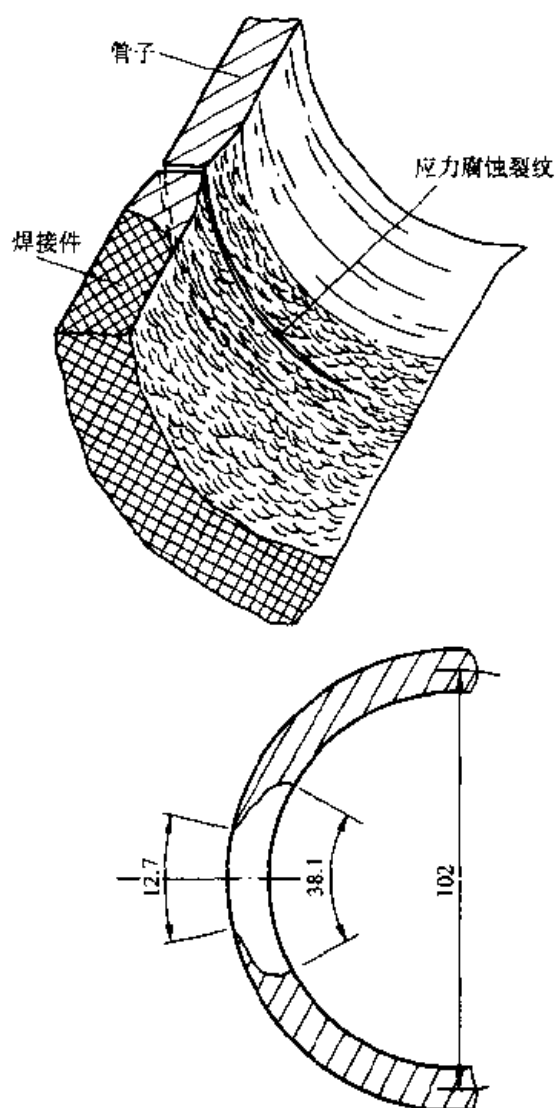


图 8-4 在核反应堆的 102mm 直径管道上检验到的应力腐蚀裂纹

子的评定, 所谓短裂纹指裂纹长度小于管子圆周长的 6%; 对于低韧度的大直径管子, 指管道直径大于 600mm, 缺陷评定宜采用弹塑性断裂力学方法, 如 J 积分方法。通过管道在荷载作用下的裂纹驱动力 J 与材料对开裂的阻力 J_R 进行比较, 从而得到裂纹起裂和失稳扩展的判据。

LBB 方案是利用断裂力学成就, 对传统设计思想的重大革命。其方案的实施, 也必须建立在准确的断裂失效分析基础上, 特别是表面裂纹的弹塑性分析。在正常工作荷载和地震安全停堆的情况下, 必须保证不能由渗漏检测的最大裂纹导致失稳破坏而引起灾难性事故。在进行大量管道试验的同时, 应用工程方法开发 LBB 的分析程序, 主要是计算含缺陷管道的承载能力、裂纹张开面积和泄漏速率等。这一工作主要集中在两个方面的研究, 即管道裂纹稳定性分析和管道开裂两相流 (液/气) 的泄漏排放评价标准。因此, 开发一个复杂荷载作用下大应变壳体裂纹扩展的流体/结构/断裂耦合计算分析程序是非常必要的。

8.4 工程构件的疲劳裂纹扩展寿命预报

疲劳失效是发生在机械工程领域中的一类十分普遍的物理现象, 其基本特征是材料在低于其静强度极限的交变应力 (或应变) 的持续作用下, 萌生多种类型的内部缺陷, 如原子位错、晶界滑移、微孔洞、微裂纹、诱发相变等, 并逐渐演变成宏观裂纹, 以及由于裂纹扩展面最终导致结构破坏的过程。交变荷载 (广义) 是萌发疲劳裂纹的动因, 扩展裂纹是疲劳破坏的结果。

据统计, 在现代工业各领域中, 约有 80% 以上的结构破坏都是由疲劳失效所引发的。航空史上非人为破坏的空难几乎都是机械零件疲劳失效所致, 尤其是在第二次世界大战前后, 发生了一系列灾难性飞机失事和战舰断裂事故, 使疲劳导致断裂引起人们更大的关注; 从 20 世纪 50 年代至 70 年代, 美国和英国有许多架客机和战机发生机毁人亡的惨剧, 也都是由疲劳破坏所造成的; 再如 2002 年 5 月的中华航空公司客机坠落台湾海峡事故, 就是飞机飞行了 22 年, 个别零件已经疲劳失效导致断裂。除金属以外的其他结构材料, 如橡胶、聚合物、木材、混凝土、陶瓷以及复合材料等也都存在疲劳裂纹问题。

疲劳分析的核心问题可以归结为: 在给定的荷载及环境条件下, 如何恰当地描述结构各内部场 (如应力、应变、位移、刚度等) 的变化历史及其演变规律。常规疲劳分析所关心的主要是结构件的剩余强度与剩余寿命的求解问题。

对于一般机械构件疲劳失效的过程可以分为裂纹形成与裂纹扩展两个阶段。就前者来说, 现行的分析方法大致为两种。第一种为完全依靠试验的方法, 直接通过与实际情况相同或者相似的试样来获取所需要的疲劳数据。这种方法虽然可靠, 但是在设计阶段, 或者结构非常复杂和构件十分昂贵时, 以及在实际情况的

类别（如几何形式、结构尺寸、加载方式、环境条件与工艺状况等）数量太庞大的情况下，无论从人力和物力，还是从工作周期上，都是不大可能实行的。

第二种为试验与统计经验相结合的分析方法。这种方法是利用已知的标准疲劳试验结果（如无缺陷标准小试样的试验），并按照经验性的当量原则或者修正办法（如考虑应力集中、几何形状和表面加工情况等），对实际情况的疲劳指标进行安全评定和寿命估算。这种方法尽管大量应用，但是对于结构危险部位的评估尚无确凿根据，如应力和应变的分布随该部位介质的不断劣化而不断改变，并且其变化历史差别很大，难以通过有限因数的修正给出准确的定位。如果完备这些修正，必须针对各种情况进行大量的统计试验，这又往往是不现实的。

对于疲劳裂纹扩展阶段的分析，目前趋于采用断裂力学的方法。所描述的问题通常为一条主裂纹在交变荷载下的扩展规律，其数学模型主要是应力强度因子或守恒积分所控制的各种裂纹扩展速率公式，如第 4.3 节的 Paris 疲劳裂纹扩展速率计算。这种处理方法的指导思想是：由于在扩展阶段的疲劳破坏行为将高度集中于裂纹尖端附近，该区域的应力和应变场的分布规律，可以被认为与远场荷载无关，而其幅值仅直接或者间接地取决于应力强度因子或守恒积分，从而，用上述裂纹扩展速率公式来描述不同结构与不同外载作用下的裂纹扩展行为。关于应力强度因子和守恒积分的计算已经在第 2 章和第 3 章中给出。所以，现行对裂纹扩展阶段的分析水平较裂纹形成阶段无论在合理性还是在准确性上都有明显的优势。

评估工程构件在疲劳裂纹扩展后的剩余强度与剩余寿命，是工业界非常关键的。关于裂纹扩展寿命的计算分析，在第 4 章中讨论了等幅交变荷载下的裂纹扩展寿命和变幅交变荷载下的裂纹扩展寿命的具体计算。

8.5 小结

只要有工程，就存在断裂事故的隐患，这并不是危言耸听，而是由发生无数事故的教训所证明的事实，如船体钢板的开裂、轮轴的断裂、铁轨的疲劳断裂、联接件和焊缝的断裂、建筑结构的地震破坏、交通和宇航工具的撞击等。大到宇宙宏观，细到肉眼所见，微至晶体颗粒，断裂无所不在，因此，断裂力学的研究仍是方兴未艾。

断裂力学本身不但具有一定的实验手段和理论体系，更重要的是断裂力学提供的观念能解决工程和材料性质上的许多具体问题，有广泛的工程应用前景。八十多年来的发展，使断裂力学已经建立起比较完整的科学体系，尤其是线弹性和弹塑性断裂力学相对比较成熟。随着材料科学的不断进步，合理有效的发挥材料特性是必然的发展方向。新的冶金工艺将提供更多的强度高、韧性高等综合力学

性能好的金属材料,更有生命力的比强度高、比刚度高的复合材料将应用在各种复杂结构和恶劣环境条件下。工程和材料科学的不断进步必将为断裂力学提出更多的课题,也为断裂力学提供了更多的用武之地。

8.6 习题

- 8-1 举例说明现代断裂力学的特点和在工程中的若干应用。
- 8-2 阐述结构安全评定的三级体系和应用原则,论述该体系的创立思想。
- 8-3 从强度理论和断裂力学的观点解释,为什么说气体管道的临界压力远远低于液体管道的临界压力?
- 8-4 应用断裂力学的观点解释 LBB 的设计思想。
- 8-5 综合第 2 章、第 3 章、第 4 章和本章的内容,论述疲劳裂纹扩展速率的分析思路。
- 8-6 综合第 4 章和本章内容,叙述疲劳裂纹寿命的评估方法。

第9章 损伤力学概述

9.1 引言

如前所述,断裂力学是20世纪固体力学的重大成就,它已经在结构强度设计、安全可靠性分析和缺陷评定规范与标准中得到广泛应用,大大提高了工业部门的设计与制造水平。基于材料损伤的概念,作为断裂力学的姊妹分支学科,损伤力学是20世纪70年后才发展起来的新学科。

材料内部存在的分布缺陷,如位错、夹杂、微裂纹和微孔洞等统称为损伤。损伤力学是研究含损伤材料的力学性质及其在一定的荷载与环境条件下损伤演化发展,最终导致破坏的力学过程。例如构件的疲劳寿命通常划分为两个阶段。第一阶段为材料内部的损伤演化、发展、聚合(损伤局部化),直至萌生有确定几何尺寸的宏观可见裂纹。第二阶段为裂纹扩展,最后导致构件失效。实际经验表明,第一阶段所经历的时间往往占使用寿命的80%左右,可以通过损伤力学进行研究。第二阶段属断裂力学研究的范畴。在许多情况下,疲劳裂纹是在严重受损伤的材料中扩展,因此采用断裂力学与损伤力学结合的方法更为有效。此外,还有许多损伤现象并不能导致由断裂力学所描述的临界开裂,而是出现崩溃或者失稳,需要应用损伤力学进行研究。断裂力学着眼于裂纹的起裂、扩展,直至破坏或者止裂的过程和结果,而损伤力学着眼于裂纹的形成和演化。

损伤力学可以分为连续损伤力学与细观损伤力学,二者互相联系互相补充。细观损伤力学根据材料细观成分的单独的力学行为,如基体、夹杂、微裂纹、微孔洞和剪切带等,采用某种均匀化方法,将非均质的细观组织性能转化为材料的宏观性能,建立分析计算理论。连续损伤力学将具有离散结构的损伤材料模拟为连续介质模型,引入损伤变量(场变量),描述从材料内部损伤到出现宏观裂纹的过程,唯像地导出材料的损伤本构方程,形成损伤力学的初、边值问题,然后采用连续介质力学的方法求解。研究表明,细观损伤力学与连续损伤力学互相补充互相联系。本章主要介绍连续损伤力学。

应当指出,目前损伤力学尚未形成成熟的和公认的理论体系,它仍处在初级的研究阶段。

9.2 损伤变量

在连续损伤力学中, 结构材料的损伤性态是遵循连续介质力学的概念, 通过对“代表性体积单元”的分析确定。如图 9-1a 的示意图, 设想将受损物体剖开, 从中取出一个材料单元。此单元的放大图见图 9-1b, 它比工程构件的尺寸小得多, 但又不是微结构, 而是包含足够多的微结构, 使得可以在这个单元内研究非均匀连续的物理量, 如质量、应力、应变、温度、损伤等量的平均行为和响应。代表体元的大小与材料微结构尺寸相关。Lemaitre (1971) 建议某些典型材料代表体元的尺寸为:

金属材料	$0.1\text{mm} \times 0.1\text{mm} \times 0.1\text{mm}$
高分子及复合材料	$1\text{mm} \times 1\text{mm} \times 1\text{mm}$
木材	$10\text{mm} \times 10\text{mm} \times 10\text{mm}$
混凝土材料	$100\text{mm} \times 100\text{mm} \times 100\text{mm}$

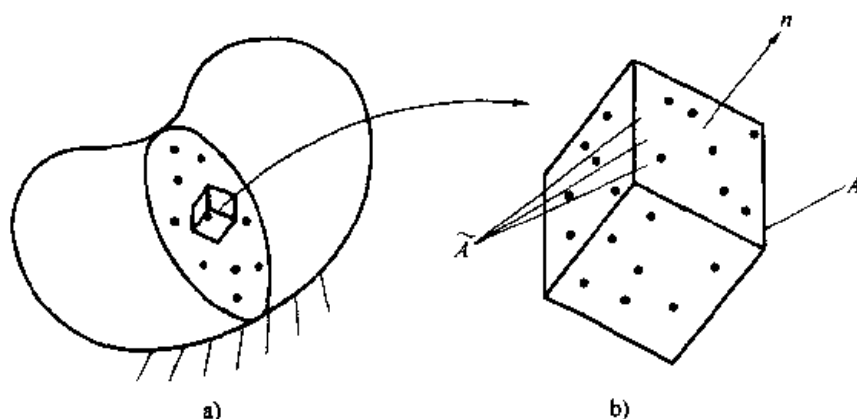


图 9-1 连续损伤力学中的代表性体积单元

Kachanov (1958) 认为材料劣化的主要机制是由于缺陷导致有效承载面积的减少, 提出用连续度来描述材料的损伤。对于一维拉伸直杆, 设无损状态的横截面为 A , 损伤后有效承载面积减少到 $\tilde{A}$, 则连续度可以由一个标量 φ 定义

$$\varphi = \frac{\tilde{A}}{A} \quad (9-1)$$

Rabotnov (1963) 引入连续度 φ 的一个互补参量——损伤度 D

$$D = 1 - \varphi \quad (9-2)$$

D 也是一个标量。在无损状态下, $D=0$ ($\tilde{A}=A$), 而 $D=1$ ($\tilde{A}=0$) 为理论上的极限损伤状态 (完全损伤)。实际材料在损伤度达到 1 之前就已经破坏。以 D_c 表示材料的实际临界损伤极限, 实验表明, 对金属而言, D_c 在 0.2~0.8 之间。由式 (9-1) 和式 (9-2), 可以得到

$$\hat{A} = (1 - D)A \quad (9-3)$$

将外荷载 F 与有效承载面积 $\hat{A}$ 之比定义为有效应力 $\tilde{\sigma}$ ，则

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\hat{A}} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (9-4)$$

其中 $\sigma = F/A$ 为无损状态下的真实应力 (Cauchy 应力)。

式 (9-2) 是损伤变量的经典表达式，已经被广泛接受。利用代表体元的概念 (见图 9-1)，可以将它推广到三维各向同性损伤的情形。这里损伤度 $D(x)$ 与损伤的方向无关，仅是空间坐标的标量函数

$$D(x) = \frac{V - \tilde{V}}{V} \quad (9-5)$$

式中 V 为体积， $\tilde{V}$ 为有效承载体积。类似式 (9-4)，有效应力张量 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 与无损状态的 Cauchy 应力张量 σ_{ij} 的关系为

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - D} \quad (9-6)$$

实验研究表明，材料内部因微空洞或微裂纹的萌生和发展往往使损伤呈明显的方向性，使损伤具有各向异性的性质，不能再使用标量值的损伤变量来描述损伤状态。Murakami 推广损伤表现为有效承载面积缩减的思想，提出了各向异性损伤的二阶张量描述。如图 9-2a 所示，从无损状态下的材料体元 B_0 中截取面元 $P_0Q_0R_0$ ，由 $v_0 dA_0$ 表示，其中矢量 v_0 表示面元方位， dA_0 表示面元面积。无损构元 B_0 在受载并且发生损伤时变形为 B_t ，称为即时损伤构元。面元 $P_0Q_0R_0$ 在即时损伤构元中变形为 PQR ，用 $v dA$ 表示，如图 9-2b 所示。假定存在一个虚拟的与 B_t 等价的无损构元 B_t ，其上与 PQR 等价的面元 $\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{R}$ 用 $\tilde{v} d\tilde{A}$

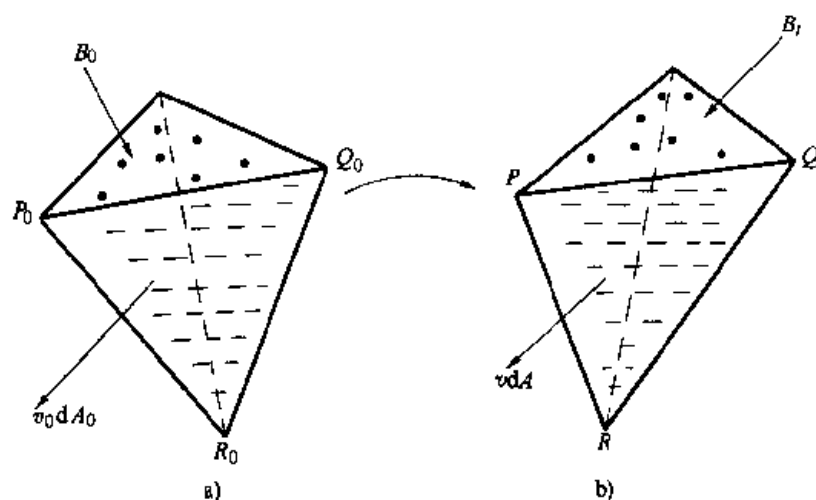


图 9-2 各向异性损伤的代表性体积单元

表示。由于损伤的各向异性性质, 矢量 vdA 与 $\tilde{v}d\tilde{A}$ 的方向一般不相同。Murakami 证明, 二者之间存在如下关系

$$\tilde{v}d\tilde{A} = (I - D)(vdA) \quad (9-7)$$

式中 I 为二阶单位张量, 另一个二阶张量 D 是一个描述一般各向异性损伤状态的内变量, 称为关于即时构形 B_t 的损伤张量。显然, 式 (9-7) 是式 (9-3) 在三维各向异性损伤情形的推广。这时, 一维情形的式 (9-4) 也推广为

$$\tilde{\sigma} = (I - D)^{-1}\sigma \quad (9-8)$$

其中上标 “-1” 表示求逆。

下面对由细观几何定义的损伤变量作几点注释:

(1) 由微缺陷引起的应力与应变集中, 以及微缺陷之间的相互影响, 所谓有效承载面积一般并非损伤材料的实际净承载面积。

(2) 基于有效承载面积缩减而定义的二阶各向异性损伤张量适于描述微孔洞损伤, 用于描述微裂纹损伤会遇到困难。一些学者将微裂纹方向密度函数展开成具有无穷多偶数阶不可约张量系数的傅立叶级数, 构成一个完备的损伤张量族。取傅立叶级数前两项得到二阶损伤张量, 一般情况下已是较好的近似。

(3) 一般情况下, 由式 (9-8) 所定义的有效应力是不对称的, 不宜于表达损伤本构关系和演化过程。为此需要将其对称化, 而对称化的处理方法有多种, 具有随意性。

(4) 张量型损伤变量难以由实验测定。

上述问题表明: 目前损伤力学还远不是一门严密或成熟的学科。

实用上, 基于从宏观并且容易测量的观点考虑, 损伤变量有各种唯像定义, 最主要的是损伤引起材料弹性模量的降低。设材料在无损伤状态的弹性张量为 C (四阶张量), 受损后有效弹性张量为 $\tilde{C}$, 则基于材料弹性性质劣化的唯像的各向异性损伤变量可以由一个四阶张量 D^* 定义, 即

$$D^* = I - \tilde{C} : C^{-1} \quad (9-9)$$

其中, I 是四阶单位张量; “:” 表示张量的双点积 (缩并)。相应的有效应力张量则定义为

$$\tilde{\sigma} = (I - D^*)^{-1} : \sigma \quad (9-10)$$

在各向同性损伤的情形, 由式 (9-9) 所定义的损伤张量仅包含两个独立常数, 即它退化为双标量损伤模型。

其他唯像的损伤变量还包括用质量密度变化、塑性特性变化、粘弹性特性变化、残余强度变化、疲劳循环周次变化、电阻率变化和声波传播速度变化等定义的损伤变量。这些变量定义的基本思想是: 连续损伤力学用不可逆过程热力学内

变量来描述材料内部结构的劣化,不一定要细致考虑这种变化的机制。损伤变量仅是材料性能劣化的相对度量与时间表征。有学者甚至提出:“不一定要对损伤变量给以物理描述和确切的物理意义”。当然,作为损伤力学发展的需要,应当揭示各种损伤变量之间的联系。唐雪松和蒋持平从不可逆热力学理论出发,阐明了从细观几何定义的单标量(各向同性损伤)与二阶张量(各向异性损伤)损伤变量同基于有效弹性模量唯像定义的双标量(各向同性损伤)与四阶张量(各向异性损伤)损伤变量之间的联系。

9.3 损伤测量

Lemaitre 对损伤测量作了较全面的介绍,并且给出了测量实例。损伤测量分为直接法与间接法两类。直接法用于测量由细观几何定义的损伤变量,从材料断面的显微图像直接观察代表单元的损伤失效面积(乘以计及应力集中影响的修正系数)。直接法直观,物理意义明确。但是它是破坏性试验,试验工作繁重。直接法适用于微孔洞型损伤。根据缺陷尺寸的大小,Lemaitre 建议,对于金属,可以在 1000 倍的显微镜下观测,对于混凝土,可以放大 1~10 倍观测。对于微裂纹损伤,断面上可能只有微裂纹与断面相交的开裂线,有效承载面积的计算遇到困难。Lemaitre 建议将裂纹假设为方形片状,以开裂线长度的平方作为损伤失效面积是一种权宜的解决办法。同时,直接法也难于直接量度各向异性损伤的二阶损伤张量。

间接法有许多种,用于测量各种唯像定义的损伤变量。间接法包括弹性模量下降法、密度改变测量法、超声波法、循环塑性响应法、第三阶段蠕变响应法、微观硬度法、电位法等。这些方法利用已经成熟的现代测量技术,一般可获得较为精确的测量结果。

9.4 损伤本构方程

连续损伤力学引入损伤变量作为内变量,确定材料的损伤本构方程与损伤演化方程,然后采用连续介质力学的理论求解边值问题。确定材料的损伤本构方程可以利用等效性假设,也可以根据不可逆热力学理论。

9.4.1 基于等效性假设的损伤本构方程

应变等效性假设由 Lemaitre (1971) 提出,被广泛用于建立损伤本构方程。这个假设可叙述为:对受损弹脆性材料,在真实应力 σ 作用下,受损状态的应变等效于在有效应力 $\bar{\sigma}$ 作用下虚拟元状态的应变。应变等效假设还可理解为:

损伤材料的本构关系与无损状态下的本构关系形式相同,只是将其中的真实应力换成有效应力。

利用应变等效假设,弹脆性损伤材料在一维情形的应力—应变关系可表示为

$$\epsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{E(1-D)} \quad (9-11)$$

在三维情形,各向同性损伤本构方程可以写为

$$\sigma_{ij} = 2\mu(1-D)\epsilon_{ij} + \lambda(1-D)\epsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (9-12)$$

其中, λ, μ 为材料在无损状态下的 Lamé 常数,即

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

δ_{ij} 为 Kronecker 张量,即

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (9-13)$$

根据本构方程(9-12),损伤材料的有效 Lamé 常数 $\tilde{\lambda}$ 和 $\tilde{\mu}$ 可定义为

$$\tilde{\lambda} = \lambda(1-D), \quad \tilde{\mu} = \mu(1-D) \quad (9-14)$$

有效泊松比为

$$\tilde{\nu} = \frac{\tilde{\lambda}}{2(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \nu \quad (9-15)$$

式(9-14)和式(9-15)表明,在损伤过程中,两个有效 Lamé 常数按相同的规律随损伤度 D 变化,泊松比保持不变。这样的结论与实验事实不符,也与细观力学结果相矛盾。由于损伤本构方程(9-12)已得到广泛应用,许多学者试图在此基础上改进,提出了影响两个独立弹性常数的唯像的双标量损伤变量 D_λ 和 D_μ (它们的物理意义将在第9.4.4节给出)。利用它们,有效 Lamé 常数可定义为

$$\tilde{\lambda} = \lambda(1-D_\lambda), \quad \tilde{\mu} = \mu(1-D_\mu) \quad (9-16)$$

损伤本构方程(9-12)改变为

$$\sigma_{ij} = 2\mu(1-D_\mu)\epsilon_{ij} + \lambda(1-D_\lambda)\epsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (9-17)$$

人们自然会问:对于各向同性损伤,从细观几何定义的单标量损伤变量与唯像定义的双标量损伤变量是否存在某种联系?回答是肯定的,对此我们将在下一小节予以讨论。

除了应变等效假设外,等效性假设还包括应力等效假设与弹性能等效假设等,它们都可以用于建立损伤本构关系。

9.4.2 不可逆热力学基本方程

反映物质内部结构不可逆变化过程的材料损伤是物质状态的一种变化。根据

带内变量的不可逆热力学进行损伤的研究, 为损伤力学提供了物理基础。

在连续介质力学中, 材料局部熵不等式, 即 Clausius - Duhamel 不等式是对本构方程的一种约束, 也就是说本构关系必须满足这个不等式。对于一个等温无穷小变形过程, Clausius - Duhamel 不等式可以表示为

$$\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\psi} \geq 0 \quad (9-18)$$

其中, σ_{ij} 与 ϵ_{ij} 是应力与无穷小应变张量; ψ 是 Helmholtz 自由能密度函数。

假设材料在损伤过程中是弹脆性和各向同性的, 采用细观几何定义的单标量损伤变量 D , 则 ψ 以双标量 ϵ_{ij} 和 D 为内变量, 即

$$\psi = \psi(\epsilon_{ij}, D) \quad (9-19)$$

对时间求导后成为

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} \quad (9-20)$$

将式 (9-20) 代入式 (9-18), 得到

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} \geq 0 \quad (9-21)$$

不等式 (9-21) 对应变率 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 的任意值均成立, 这就要求

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (9-22)$$

定义

$$Y = - \frac{\partial \psi}{\partial D} \quad (9-23)$$

Y 是损伤变量 D 的对偶广义力, 称为自由能释放率。

利用式 (9-22) 和式 (9-23), 不等式 (9-21) 改写为

$$Y\dot{D} \geq 0 \quad (9-24)$$

式中, $Y\dot{D}$ 是损伤过程中的损伤耗散功率。

不等式 (9-24) 表明热力学第二定律限定损伤耗散功率非负值。一般假定材料的损伤过程是不可逆的, 于是有

$$D \geq 0, \quad \dot{D} \geq 0, \quad Y \geq 0 \quad (9-25)$$

式 (9-22) 和式 (9-23) 是材料的状态方程, 它表明应变能密度 ψ 可以看作是材料的热力学势。损伤过程是一个耗散过程。根据不可逆热力学, 可以假定存在一个耗散势 ψ^* , 以 ϵ_{ij} 和 D 的对偶变量 σ_{ij} 、 Y 为内变量, 根据内变量的正交流动法则, 导出损伤演化方程

$$\dot{D} = \frac{\partial \psi^*}{\partial Y} \quad (9-26)$$

概括来说, 从不可逆热力学理论, 对损伤材料存在一个应变能密度 ψ 和一个耗散势 ψ^* , 利用它们, 可以导出损伤-应变耦合本构方程、损伤应变能释放

率方程（即损伤度本构方程）和损伤演化方程的一般形式。

9.4.3 应变—损伤耦合本构方程的不可逆热力学推导

利用式 (9-22) 和式 (9-23)，推导应变—损伤耦合本构方程与损伤应变能释放率方程的一般形式。

假设材料的初始状态为 $\sigma_{ij} = \epsilon_{ij} = 0$, $Y = D = 0$ 。将 Helmholtz 自由能密度 $\psi(\epsilon_{ij}, D)$ 用 Taylor 级数表示，因为 ϵ_{ij} 是无穷小量， D 为有限值，故展开式在 ϵ_{ij} 的二次项与 D 的 N 次项截断，即

$$\psi(\epsilon_{ij}, D) = \psi_0 + \sum_{n=1}^N C^{(n)} D^n + \sum_{n=0}^N B_{ij}^{(n)} \epsilon_{ij} D^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N A_{ijkl}^{(n)} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} D^n \quad (9-27)$$

式中， ψ_0 为材料初始状态的自由能值，可取为零； $C^{(n)}$ 是标量值系数； $A_{ijkl}^{(n)}$ 与 $B_{ij}^{(n)}$ 分别为四阶和二阶张量值系数。

将展开式 (9-27) 代入式 (9-22) 和式 (9-23)，得到

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^N B_{ij}^{(n)} D^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N A_{ijkl}^{(n)} \epsilon_{kl} D^n \quad (9-28)$$

$$Y = - \sum_{n=1}^N C^{(n)} n D^{n-1} - \sum_{n=1}^N B_{ij}^{(n)} \epsilon_{ij} n D^{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_{ijkl}^{(n)} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} n D^{n-1} \quad (9-29)$$

假设弹脆性材料经历过一个加载过程，产生一定的损伤后又完全卸载，此时 $\sigma_{ij} = \epsilon_{ij} = 0$, $Y = 0$ 。由于损伤是不可逆的， $D \neq 0$ ，且 D 可以是它的取值范围内的任意正值。由式 (9-28) 和式 (9-29) 可求得

$$B_{ij}^{(n)} = 0 \quad C^{(n)} = 0 \quad (\text{对 } n \text{ 的任意值成立}) \quad (9-30)$$

从而使式 (9-28) 和式 (9-29) 简化为

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^N A_{ijkl}^{(n)} \epsilon_{kl} D^n \quad (9-31)$$

$$Y = - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_{ijkl}^{(n)} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} n D^{n-1} \quad (9-32)$$

再令 $D = 0$ ，并设 $A_{ijkl}^{(0)} = C_{ijkl}$ ，式 (9-27) 和式 (9-31) 变化为

$$\psi(\epsilon_{ij}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (9-33)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (9-34)$$

显然，式 (9-33) 和式 (9-34) 是人们所熟悉的线弹性材料在无损伤状态下的应变能密度表达式与应力—应变本构方程， C_{ijkl} 是材料的弹性张量。

对于各向同性线弹性材料， C_{ijkl} 仅包含两个独立弹性常数，可以表示为

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (9-35)$$

注意到张量 σ_{ij} 和 ϵ_{ij} 的对称性，由式 (9-31) 和式 (9-32)，系数张量 $A_{ijkl}^{(n)}$ (n

$= 1, 2, \dots, N$) 应该是对称的。注意到 Y 是非负量, 在各向同性损伤情形下, 可以将 $A_{ijkl}^{(n)}$ 表示为

$$A_{ijkl}^{(n)} = -\lambda \alpha^{(n)} \delta_{ij} \delta_{kl} - \mu \beta^{(n)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (9-36)$$

式中, λ 和 μ 是材料无损时的 Lamé 弹性常数, $\alpha^{(n)}$ 和 $\beta^{(n)}$ 是无量纲系数。

最后, 各向同性弹脆性损伤材料的应力—应变本构方程与损伤应变能释放率方程可以写为

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} \left(1 - \sum_{n=1}^N \beta^{(n)} D^n\right) + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \left(1 - \sum_{n=1}^N \alpha^{(n)} D^n\right) \quad (9-37)$$

$$Y = \frac{1}{2} \lambda \sum_{n=1}^N \alpha^{(n)} n D^{n-1} (\varepsilon_{kk})^2 + \mu \sum_{n=1}^N \beta^{(n)} n D^{n-1} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (9-38)$$

其中像 Lamé 弹性常数 μ 和 λ 一样, 无量纲系数 $\alpha^{(n)}$ 和 $\beta^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) 可以通过试验确定。如果能确切地描绘微损伤的形式, 这两组系数也可以由细观力学方法确定。

9.4.4 几点讨论

前面已经看到, 关于各向同性弹脆性材料的本构方程, 有通过应变等效性假设给出的方程 (9-12), 有通过唯像的双标量损伤变量建立的方程 (9-17), 根据不可逆热力学理论推导的方程 (9-37)。现在讨论这些方程之间的联系。

对于由不可逆热力学理论推导的方程 (9-37), 若令

$$D_\lambda = \sum_{n=1}^N \alpha^{(n)} D^n, \quad D_\mu = \sum_{n=1}^N \beta^{(n)} D^n \quad (9-39)$$

可以得到

$$\sigma_{ij} = 2\mu(1 - D_\mu) \varepsilon_{ij} + \lambda(1 - D_\lambda) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (9-40)$$

式 (9-40) 和式 (9-17) 完全相同。它表明不可逆热力学理论能够为唯像的损伤本构方程提供理论的解释。

再令

$$D_\lambda = D_\mu = D^* \quad (9-41)$$

方程 (9-40) 化为方程 (9-12) 的形式。它说明由应变等效原理建立的损伤本构方程一般是一个近似方程, 且方程中的损伤变量一般应理解为唯像的损伤变量。

式 (9-39) 表明, 对于各向同性弹脆性损伤, 唯像定义的双标量损伤变量可以看作是细观几何定义的损伤变量的损伤效应函数。同时基于宏观可测量的唯像损伤变量一般宜于量度, 实用上更加方便。

采用细观力学方法, 可以由细观几何定义的损伤变量确定唯像的损伤变量 (损伤效应函数), 说明细观损伤力学与连续损伤力学互相联系, 互相补充。例如, 对于二维随机分布的微圆孔洞损伤, Kachanov 采用细观力学的 Mori-Tanaka 方法, 计算了材料的有效弹性模量

$$\tilde{E} = \frac{1-\rho}{1+2\rho} E, \quad \tilde{\nu} = \frac{\rho + \nu - \rho\nu}{1+2\rho} \quad (9-42)$$

其中, E 、 ν 是无损材料的弹性模量与泊松比; $\tilde{E}$ 、 $\tilde{\nu}$ 为它们损伤后的有效值; ρ 为空隙率。

将 ρ 定义为损伤度 D , 再利用 Lamé 常数 λ 、 μ 与工程常数 E 、 ν 之间的换算关系, 可以确定唯像定义的损伤变量

$$1 - D_\lambda = \frac{(1-D)(D+\nu-D\nu)(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu(1+3D+\nu-D\nu)(1-2\nu+2D\nu)} \quad (9-43)$$

$$1 - D_\mu = \frac{(1-D)(1+\nu)}{1+3D+\nu-D\nu} \quad (9-44)$$

对于二维随机分布的微裂纹损伤材料, Bevensite 采用 Mori-Tanaka 方法求得的有效模量的解答是

$$\tilde{\mu} = \frac{1+\nu}{1+\nu+\pi\rho^*} \mu, \quad \tilde{E} = \frac{E}{1+\pi\rho^*} \quad (9-45)$$

其中 $\rho^* = \frac{ml^2}{\Delta A}$ 为微裂纹面积密度函数, m 是代表性面元上的微裂纹数, l 为微裂纹平均半长, ΔA 是面元面积。

将 ρ^* 定义为损伤度 D^* 可以得到

$$1 - D_\lambda = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1+\nu+\pi D^*)(1-2\nu+\pi D^*)} \quad (9-46)$$

$$1 - D_\mu = \frac{(1+\nu)}{1+\nu+\pi D^*} \quad (9-47)$$

9.5 损伤演化方程

从理论上, 损伤演化方程可以利用耗散势 ψ^* 由方程 (9-26) 推导。由于耗散势需要由经验和实验确定, 许多学者直接根据经验和实验拟合建立损伤演化方程。

Kachanov (1958) 研究了最简单的脆性损伤破坏, 提出了由连续度 φ 表示的一维损伤演化方程

$$\dot{\varphi} = \begin{cases} -A \left(\frac{\sigma}{\varphi} \right)^n & \sigma > \sigma_{th} \\ 0 & \sigma \leq \sigma_{th} \end{cases} \quad (9-48)$$

其中, A 和 n 是由实验确定的材料参数, 且 $A > 0$, $n \geq 1$; 负号表示连续度随着损伤增加是逐渐减少的; σ_{th} 是由应力表示的损伤门槛值, 也是材料参数。方程 (9-48) 等价于以损伤度表示的损伤演化方程

$$\dot{D} = \begin{cases} A \left(\frac{\sigma}{1-D} \right)^n & \sigma > \sigma_{th} \\ 0 & \sigma \leq \sigma_{th} \end{cases} \quad (9-49)$$

在某些情况下,材料损伤并不直接与时间相关,而仅是应变状态的函数。Lemaitre 等建议采用形式简单的下列损伤演化方程

$$\frac{dD}{dN} = \begin{cases} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^n & \text{当 } \epsilon > \epsilon_{th} \text{ 和 } d\epsilon > 0 \\ 0 & \text{当 } \epsilon \leq \epsilon_{th} \text{ 和 } d\epsilon < 0 \end{cases} \quad (9-50)$$

其中 ϵ_0 和 n 是材料参数。 ϵ_{th} 是用应变表示的损伤门槛值,也是材料参数。

疲劳问题以应力循环次数 N 为广义时间变量。Chaboche 对于高周疲劳提出的损伤演化方程为

$$\frac{dD}{dN} = \left[\frac{\sigma_a}{b(1-D)} \right]^\beta f(D) \quad (9-51)$$

其中, σ_a 是应力幅; β 和 b 是材料参数,且 b 与平均应力相关,它们由实验确定; $f(D)$ 是损伤度的函数,Chaboche 给出了两种形式

$$(1) \quad f(D) = (1-D)^{-\beta_1} \quad (9-52)$$

这里 β_1 是材料参数。

$$(2) \quad f(D) = [1 - (1-D)^{1+\beta}]^\alpha \quad (9-53)$$

这里 α 也是材料参数。第二种形式与某些试验结果符合得更好。

在实际研究中,通常针对所研究的问题的特点,做出一定的简化和假设,建立较为符合所研究问题的损伤演化方程。

9.6 小结

损伤力学作为断裂力学的补充和完善,有两个基本内容:一是定义损伤变量并将其视为内变量引入到材料的本构方程中,发展含损伤内变量的本构理论;二是寻找基于试验结果之上的损伤演化方程。在热力学理论框架下,这两方面内容可以归结为求塑性势函数和自由能函数。宏观意义的损伤力学是突破了传统意义的断裂力学的准则概念,在准则中引入了损伤变量,考虑了损伤过程的累积效应。细观意义的损伤力学主要是研究裂纹萌发的机理,从材料内部缺陷上揭示开裂、裂纹演化,直至形成宏观扩展裂纹的过程。

9.7 习题

9-1 论述损伤力学和断裂力学的联系和区别。

9-2 关于各向同性弹性材料的本构方程,有通过应变等效性假设给出的方程(9-12),有通过唯像的双标量损伤变量建立的方程(9-17),有根据不可逆热力学理论推导的方程(9-37)。论述这些方程的物理基础和相互之间的联系。

9-3 从细观尺度解释损伤力学是研究材料中裂纹萌生的过程。

第 10 章 含损伤断裂力学的若干问题

在工程材料内部往往存在着大量弥散分布的细观缺陷，如夹杂、缝隙和孔洞等，在外力或温度等外部因素作用下，损伤将逐渐演化，最终导致扩展裂纹。我们首先针对含损伤的裂纹扩展问题进行分析，建立应力强度因子与裂纹扩展速率的关系。关于材料内部微裂纹的形成和演化，将描述著名的含孔洞弹—塑性固体 Gurson 模型，以及给出含微孔洞材料的累积损伤评估的应用实例。最后作为本章乃至全书的总结，简要介绍损伤力学与断裂力学结合所形成的新学科，即含损伤的断裂力学——破坏力学。

10.1 以损伤力学为基础的疲劳寿命预测

本节再次引入损伤度 D 的概念。研究含有一定损伤程度的材料的裂纹扩展速率，建立裂纹扩展速率与应力强度因子的关系。这样，建立断裂力学与损伤力学的某些联系。

损伤度 D 是用来描述材料损伤程度的量，对各向同性材料，它是一个标量，数值介于 0 与 1 之间，即

$$0 \leq D \leq 1 \quad (10-1)$$

在材料受力之前，可以认为 $D=0$ ；而在材料破坏时，可以认为 $D=1$ 。

对于承受单轴荷载的杆件而言，可以将损伤度 D 看作是杆件有效承载截面的减缩率。杆件所受轴力为 F ，设损伤度为 0 时的截面面积为 A ，则应力为 σ ，即

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (10-2)$$

而损伤度为 D 时的截面面积为 $A(1-D)$ ，应力为 $\tilde{\sigma}$

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{A(1-D)} = \sigma \frac{1}{(1-D)} \quad (10-3)$$

式中， σ 与 $\tilde{\sigma}$ 分别称为名义应力与当量应力。也可以进一步写成名义应变 ϵ 与当量应变 $\tilde{\epsilon}$ ，分别为

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad \tilde{\epsilon} = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{E} \frac{1}{(1-D)} = \epsilon \frac{1}{(1-D)} \quad (10-4)$$

由此可见, 损伤度可以视为材料弹性模量的降低率。损伤度为 0 时的弹性模量为 E , 而损伤度为 D 时的弹性模量为 $E(1-D)$ 。考虑到式 (10-3) 和式 (10-4), 读者可以写出杆件截面刚度 EA 的降低率。

当杆件受到重复荷载时, 材料的损伤度 D 将随着荷载循环次数 N 的增加而增加。设循环中的最大与最小名义应变分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 , 而应变的幅值为 $\Delta\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_2$ 。于是, 损伤度随荷载循环次数的增长率可以写成如下形式

$$\frac{dD}{dN} = \alpha \left\{ \frac{\epsilon_1}{1-D} \right\}^{m_1} \left\{ \frac{\Delta\epsilon}{1-D} \right\}^{m_2} \left\{ \frac{1}{1-D} \right\}^n \quad (10-5)$$

式中, α 、 m_1 、 m_2 、 n 为材料常数。引入应变比 $R = \epsilon_2/\epsilon_1$, 则式 (10-5) 可以改写为

$$\frac{dD}{dN} = \beta \left\{ \frac{\Delta\epsilon}{1-D} \right\}^m \left\{ \frac{1}{1-D} \right\}^n \quad (10-6)$$

式中, β 、 m 为材料常数, 比较式 (10-5) 和式 (10-6), 给出

$$\beta = \alpha \left\{ \frac{1}{1-R} \right\}^{m_1}, \quad m = m_1 + m_2 \quad (10-7)$$

如果荷载是等幅的, 由积分式 (10-6), 可得损伤度与名义应变和循环次数的关系为

$$\frac{1}{m+n+1} \{1 - (1-D)^{m+n+1}\} = \beta(\Delta\epsilon)^m N \quad (10-8)$$

显然, 若令 $D=1$, 即达到损伤极限, 则可由式 (10-8), 得到使材料破坏时荷载的临界循环次数, 即杆件的寿命 N_e 与名义应变幅值 $\Delta\epsilon$ 的关系如下

$$\frac{1}{m+n+1} = \beta(\Delta\epsilon)^m N_e \quad (10-9)$$

考虑到式 (10-7) 式, 可将式 (10-9) 改写为

$$\frac{1}{m+n+1} = \alpha \epsilon_1^{m_1} (\Delta\epsilon)^{m_2} N_e \quad (10-10)$$

为了确定一般受力状态下 (多轴应力) 的损伤度增长率, 可以用等效应变 ϵ_e 代替式 (10-5) 或者式 (10-6) 中的单轴应变。等效应变等于

$$\epsilon_e = \sqrt{\xi I_1^2 + (1-\xi) I_2} \quad (10-11)$$

这里, ξ 是由实验确定的一个无量纲材料参数; I_1 与 I_2 分别为应变分量坐标变换的第一与第二不变量, 它们用张量形式表示如下

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \delta_{ij} \epsilon_{ij} \\ I_2 &= \frac{1}{2!} e_{ijk} e_{lmk} \epsilon_{il} \epsilon_{jm} \end{aligned} \right\} \quad (10-12)$$

其中, δ_{ij} 为 Kronecker 张量, 如式 (9-13) 所示。而

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{如果任意两个足标相同} \\ 1, & \text{如果 } i, j, k \text{ 按正序号排列} \\ -1, & \text{如果 } i, j, k \text{ 按逆序号排列} \end{cases}$$

于是, 式 (10-5) 与式 (10-6) 可得在一般受力状态下的损伤度增长率表达式如下

$$\frac{dD}{dN} = \alpha \left\{ \frac{\epsilon_{el}}{1-D} \right\}^{m_1} \left\{ \frac{\Delta \epsilon_e}{1-D} \right\}^{m_2} \left\{ \frac{1}{1-D} \right\}^n \quad (10-13)$$

与

$$\frac{dD}{dN} = \beta \left\{ \frac{\Delta \epsilon_e}{1-D} \right\}^m \left\{ \frac{1}{1-D} \right\}^n \quad (10-14)$$

10.2 疲劳裂纹扩展速率的损伤力学研究

疲劳裂纹扩展具有相当复杂的细观机制, 如位错的发射、微裂纹的形核、扩展和连接, 裂纹尖端往往伴随着小范围的塑性变形。疲劳裂纹扩展的过程实际上是裂纹尖端在高梯度应力和应变作用下不断损伤的过程, 是裂纹尖端塑性区和损伤区演化和运动的过程。因此, 如果应用损伤力学的方法研究疲劳裂纹问题, 则可以对疲劳裂纹起裂和扩展得到更贴近于物理本质的认识。发展和完善现有的疲劳断裂理论, 并与损伤力学理论结合起来, 使传统的疲劳断裂的实验数据和结果可以用于损伤理论中去。

文献 [29] 中对疲劳裂纹扩展的损伤力学研究是以核反应堆中压力容器和管道的破前漏 (Leak-before-break) 分析为重要工程背景的, 因此主要是针对于表面裂纹的疲劳扩展, 重点考虑表面裂纹扩展的形状演化、初始贯穿尺寸及其对破前漏结果的影响。利用标量损伤因子 D 和一种简化的疲劳损伤演化方程, 给出了如下的疲劳裂纹扩展方程

$$\frac{dL}{dN} = C_d (\Delta K)^\gamma \quad (10-15)$$

其中

$$C_d = \frac{r_c}{2D_c} \left(\frac{1}{C_2 \sqrt{2\pi r_c}} \right)^\gamma \quad (10-16)$$

式中, D_c 是损伤临界值; r_c 是裂纹尖端的细观损伤特征尺寸; C_2 和 γ 是疲劳损伤演化常数; L 是表面裂纹在某一方向上的尺寸, 是空间坐标的函数。

式 (10-15) 与式 (4-1) 的 Paris 定律有相同的形式, 因此尽管 Paris 公式是经验公式, 但是式 (10-15) 却表明了其物理背景。根据损伤判据, 可以将裂纹的起裂和扩展分为三个阶段来处理, 即起裂前的损伤演化阶段、单向扩展阶段

和双向扩展阶段。其中第三个阶段，对于管道中的轴向半椭圆表面裂纹，其长半轴 a 、短半轴 b 的演化方程分别为

$$\frac{da}{dN} = C_d(\Delta K_a)^y, \quad \frac{db}{dN} = C_d(\Delta K_b)^y \quad (10-17)$$

式中 ΔK_a 和 ΔK_b 分别是裂纹长短半轴处的应力强度因子变化幅值， N 为载荷循环次数。

而对于环向椭圆表面裂纹，其长短半轴的演化方程表示为

$$\frac{da}{dN} = C_d(\Delta K_a)^y, \quad \frac{db}{dN} = \frac{da}{dN} \tan \theta + C_d(\Delta K_b)^y \quad (10-18)$$

式中 θ 是裂纹半角。文献 [30] 给出了多种情况下表面裂纹疲劳扩展的损伤分析结果，并应用到实际的反应堆压力容器和管道的分析设计中去。

赵军和张行^[31]从连续损伤力学的角度对 I 型平面应力下疲劳裂纹尖端的力学行为进行了比较详细的研究。采用的线弹性损伤本构方程为

$$\sigma_{ij} = S_{ijkl}(1-D)\epsilon_{kl} = S_{ijkl}\varphi\epsilon_{kl} \quad (10-19)$$

式中， S_{ijkl} 是无损伤刚度张量； $\varphi = 1 - D$ 是连续度。 φ 的演化方程为

$$\frac{d\varphi}{dN} = \begin{cases} -\tilde{c} \left(\frac{\sigma_e}{\varphi} \right)^m \frac{1}{\varphi^{n-m}}, & \text{当 } \sigma_e \geq \sigma_{th} \varphi^\gamma \\ 0, & \text{当 } \sigma_e < \sigma_{th} \varphi^\gamma \end{cases} \quad (10-20)$$

式中， $\tilde{c}$ 、 m 、 n 、 γ 和 σ_{th} 是材料常数； σ_e 是 Mises 等效应力。当 $\gamma = 1$ 时，如图 10-1 所示，用一个完全损伤的一个薄带来代替传统意义的裂纹，图中点的密度表示损伤的程度。作为损伤区的尖端区域，损伤过程区定义为当前状态损伤正在继续发展的区域。对于小范围损伤假设下的平面应力 I 型裂纹，选取如下的 Airy 应力函数

$$A = ar^{\lambda+2} \tilde{A}(\theta) \quad (10-21)$$

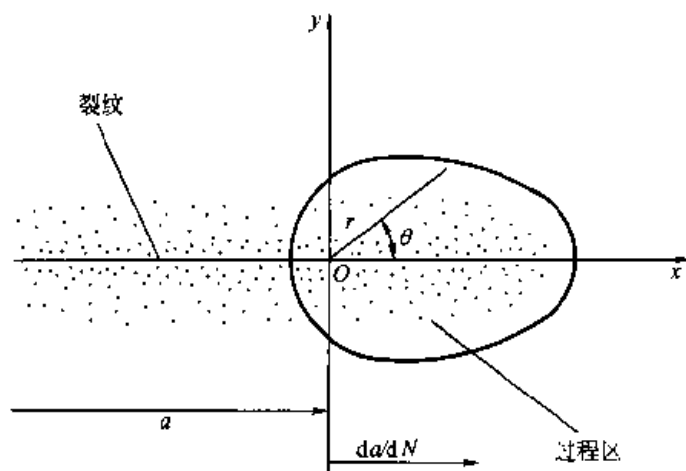


图 10-1 完全损伤的一个薄带代替传统意义的裂纹

应力分量与 Airy 应力函数的关系为

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) \quad (10-22)$$

由此得到

$$\sigma_{rr} = \alpha r^\lambda \bar{\sigma}_{rr}(\theta), \quad \sigma_{\theta\theta} = \alpha r^\lambda \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta), \quad \sigma_{r\theta} = \alpha r^\lambda \bar{\sigma}_{r\theta}(\theta) \quad (10-23)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr}(\theta) &= (\lambda + 2)\bar{A} + \bar{A}'' \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta) &= (\lambda + 2)(\lambda + 1)\bar{A} \\ \bar{\sigma}_{r\theta}(\theta) &= -(\lambda + 1)\bar{A}' \end{aligned} \right\} \quad (10-24)$$

式中 $(\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{d\theta}$ 。此时裂纹尖端的平衡方程自然满足。裂纹尖端附近的损伤场可以由连续度 φ 表示为如下形式

$$\varphi(r, \theta) = \beta r^\mu \bar{\varphi}(\theta) \quad (10-25)$$

利用损伤材料的本构关系得到裂纹尖端的应变场，并代入平面应力情况下的协调方程，得到

$$\bar{A}'''' - 2\bar{E}\bar{A}''' + (b_1 + \bar{G})\bar{A}'' - b_2\bar{E}\bar{A}' + (b_3 + e_1\bar{G})\bar{A} = 0 \quad (10-26)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\bar{\varphi}'}{\bar{\varphi}}, \quad \bar{G} = 2\bar{E}^2 - \left[\frac{\bar{\varphi}''}{\bar{\varphi}} \right] \\ b_1 &= e_1 + c_2 - c_3\nu + c_1e_3, \quad b_2 = 2e_1 + c_1e_3, \quad b_3 = c_2e_1 + c_3e_2, \\ c_1 &= -2(\lambda - \mu + 1), \quad c_2 = \mu - \lambda, \quad c_3 = (\lambda - \mu)(\lambda - \mu + 1) \end{aligned} \quad (10-27)$$

为了确定过程区，还需要另外一组条件，可由裂纹尖端损伤演化的条件得到。一方面，将式 (10-22) ~ 式 (10-24) 代入式 (10-20)，得到损伤区的损伤演化率

$$\frac{d\varphi}{dN} = -\bar{c}\alpha^m \beta^{-n} r^{m\lambda - n\mu} \bar{\sigma}_e^m \bar{\varphi}^{-n} \quad (10-28)$$

式中 $\bar{\sigma}_e = (\bar{\sigma}_{rr}^2 - \bar{\sigma}_{rr}\bar{\sigma}_{\theta\theta} + \bar{\sigma}_{\theta\theta}^2 + 3\bar{\sigma}_{r\theta}^2)^{1/2}$ 。另一方面， $\frac{d\varphi}{dN}$ 还可以表示为

$$\frac{d\varphi}{dN} = \frac{d\varphi}{da} \frac{da}{dN} = \frac{da}{dN} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \frac{d\beta}{da} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{dr}{da} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{d\theta}{da} \right) \quad (10-29)$$

由式 (10-25) 及几何关系，得

$$\frac{d\varphi}{dN} = \beta \frac{da}{dN} r^{\mu-1} (\bar{\varphi}' \sin \theta - \mu \bar{\varphi} \cos \theta) \quad (10-30)$$

比较式 (10-28) 和式 (10-30)，得到

$$\frac{da}{dN} = \bar{c}\alpha^m \beta^{-(n-1)} \quad (10-31)$$

$$m\lambda - \mu n = \mu - 1, \text{ 或 } \lambda = \frac{\mu(n+1) - 1}{m} \quad (10-32)$$

$$\bar{\varphi}' \sin \theta - \mu \bar{\varphi} \cos \theta = -\bar{\sigma}_e^m \bar{\varphi}^{-n} \quad (10-33)$$

边界条件包括应力和损伤场的对称条件、归一化条件和“裂纹”面上的应力和损伤条件, 分别表示为

$$\bar{A}'(0) = \bar{A}''' = 0, \bar{\varphi}'(0) = 0 \quad (10-34)$$

$$\bar{A}(0) = 1 \quad (10-35)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta_d) = \sigma_{r\theta}(r, \theta_d) = 0, \varphi(r, \theta_d) = 0 \quad (10-36)$$

由式 (10-23)、式 (10-34) 和式 (10-35), 可以得到

$$\bar{\varphi}(0) = \left[\frac{\bar{\sigma}_e^m(0)}{\mu} \right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad \bar{\varphi}''(0) = f[\mu, \bar{A}''(0)] \quad (10-37)$$

式中函数 f 的表达式见文献 [31]。式 (10-36) 中的参数 θ_d 由以下条件得到

$$\bar{A}\{\theta^*[\mu, \bar{A}''(0)]\} = 0, \bar{A}'\{\theta^*[\mu, \bar{A}''(0)]\} = 0 \quad (10-38)$$

利用以上方法进行的数值算例表明, 对于不同的参数 m 和 n 的取值, 裂纹尖端的渐进应力场没有奇异性或有很弱的奇异性, 而应变场的奇异性远远低于 K 场的 $-1/2$ 奇异性。

由式 (10-31) 可知, 只要确定了参数 α 和 β , 即可以定量地计算裂纹的疲劳扩展率。设在裂纹尖端过程区与远场 K 控制区之间有一个过渡区, 如图 10-2 所示, 其应力分布为

$$\sigma_{ij}^*(r, \theta) = \tilde{K}_1 r^{-\frac{1}{p}} \tilde{\sigma}_{ij}^*(\theta) \quad (10-39)$$

式中 $\tilde{K}_1$ 为过渡区的应力强度因子, 参数 $p > 2$ 。利用过渡区与损伤区之间的应力连续、损伤连续等条件以及损伤区内的应力场, 可以导出

$$\omega = \left\{ \frac{\tilde{K}_1 \bar{\sigma}_e(0) \bar{\sigma}_{rr}^*(0)}{\sigma_{th} \bar{\sigma}_{rr}(0)} \right\}^p$$

$$\alpha = \left\{ \frac{\bar{\sigma}_{rr}(0)}{\tilde{K}_1 \bar{\sigma}_{rr}^*(0)} \right\}^{p\lambda} \left[\frac{\sigma_{th}}{\bar{\sigma}_e(0)} \right]^{p\lambda+1}, \quad \beta = \frac{1}{\bar{\varphi}(0)} \left[\frac{\sigma_{th} \bar{\sigma}_{rr}(0)}{\tilde{K}_1 \bar{\sigma}_{rr}^*(0) \bar{\sigma}_e(0)} \right]^{p\mu} \quad (10-40)$$

代入式 (10-31), 得到与 Paris 公式相似的裂纹疲劳扩展方程

$$\frac{da}{dN} = c \tilde{K}_1^p \quad (10-41)$$

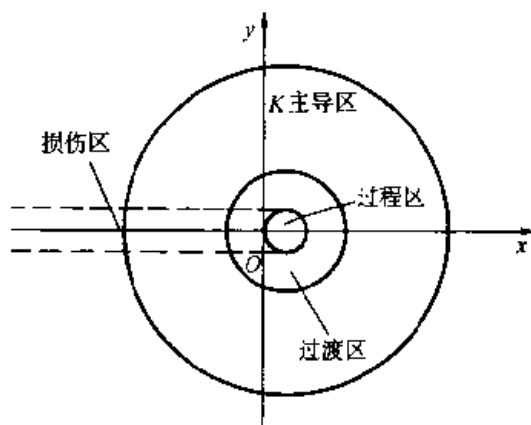


图 10-2 裂纹尖端场的分区结构

式中

$$c = \tilde{c} [\bar{\varphi}(0)]^{n+1} \left[\frac{\sigma_{th}}{\sigma_e(0)} \right]^{m-p} \left[\frac{\bar{\sigma}_{rr}^*(0)}{\bar{\sigma}_{rr}(0)} \right]^p \quad (10-42)$$

应当指出, 以上分析是建立在应变分布与损伤分布无关的假设之上, 即是解耦的疲劳裂纹扩展速率表达式。显然, 这与累进损伤的物理过程向背, 因为高应变区必然引起高损伤度, 应变的发展必然导致损伤的演化。当应变分布比较均匀, 或者在小应变条件下, 以上分析还是适用的。

10.3 板试件复合型疲劳裂纹形成与扩展

图 10-3 表示一个含双边对称半圆缺口的平板, 该板含有一个圆孔, 孔中心位于板的纵轴上, 其半径与高度可变化。板受到周期性的轴力作用, 很明显疲劳源将不再位于半圆缺口底部, 而可能偏向孔的一侧, 也可能移至圆孔周边。同时, 疲劳裂纹扩展的轨迹也将由直线变为曲线, 从而, 裂纹由纯 I 型变为 I 和 II 的复合型。这种非对称的复合型疲劳裂纹形成与扩展问题是不能单纯依靠疲劳试验或者断裂力学方法加以解决的, 参考文献 [28] 中提出了应用附加荷载—损伤力学—有限元方法的解决方案。

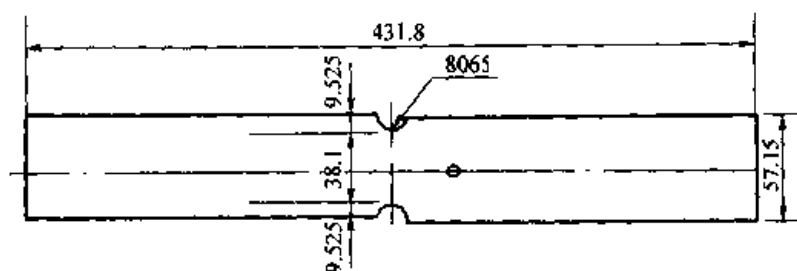


图 10-3 含双边对称半圆缺口和轴线上圆孔的平板

首先, 根据无缺口无孔洞试件与某一种有缺口无孔洞试件的疲劳实验数据和预估寿命结果, 确定损伤演化方程的材料参数。然后, 对比其他有缺口无孔洞试件的疲劳实验数据和预估寿命结果, 以验证本方法的正确性。

利用双对称性, 图 10-4a 为有缺口无孔洞的 1/4 铝合金试件, 预估寿命为 $N_{cr} = 96\ 227$; 图 10-4b 为有缺口有小孔洞的 1/4 试件, 小孔洞与缺口位于同一横截面上, 预估寿命为 $N_{cr} = 70\ 547$; 图 10-4c 为有缺口有大孔洞的 1/4 试件及其有限元网格, 大孔洞与缺口位于同一横截面上, 预估寿命为 $N_{cr} = 40\ 612$ 。

以上三个试件预估疲劳寿命的结果是合理的。三种试件除圆孔外, 其他条件完全相同。在双对称情况下, 裂纹扩展轨迹是一条与对称轴重合的直线。因此, 无孔试件寿命最长, 小孔次之, 大孔最短。

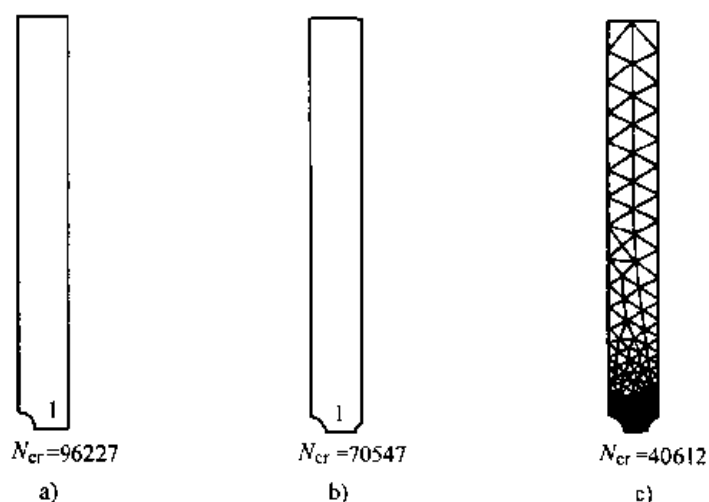


图 10-4 含缺口 1/4 铝合金试件

a) 无孔洞 b) 有小孔 c) 有大孔

当中间圆孔沿轴线偏移后，由于孔的偏心改变了板内应力分布，延长了裂纹扩展迹线，从而增加了裂纹扩展寿命，如图 10-5b 所示的 1/2 试件，图中的阿拉伯数字表示裂纹萌生的先后顺序。当然，孔位过高将于事无补，如图 10-5c 所示的 1/2 试件；孔径过大亦将适得其反，如图 10-5a 所示 1/2 试件。

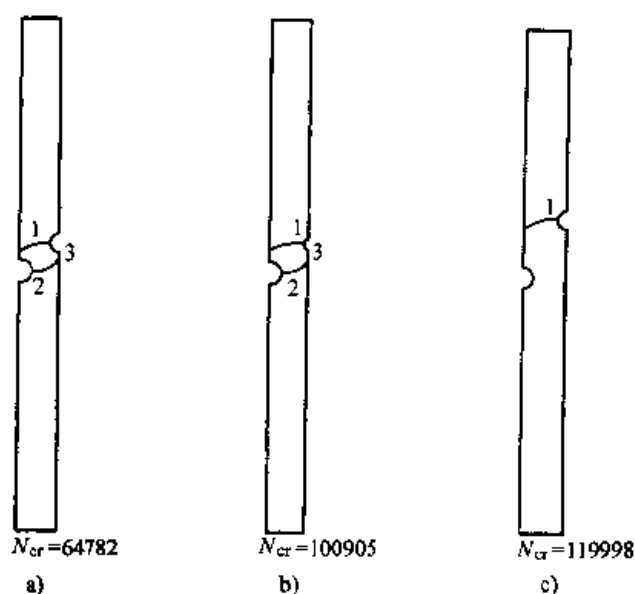


图 10-5 含缺口 1/2 铝合金试件，对板内应力分布的影响

a) 孔径过大 b) 孔径适中 c) 孔偏远

通过以上的损伤力学与断裂力学的分析，结合有限元算法，对构件进行抗疲劳优化设计，既延长了构件寿命，又减轻了结构重量。

10.4 含孔洞材料的累积损伤评估

在交变载荷作用下, 结构中会有大量的微裂纹形核, 并且微裂纹随着荷载循环次数的增加而逐渐扩展, 最终形成宏观裂纹导致材料的断裂, 这种破坏称为疲劳损伤破坏。疲劳强度已经从经典的无限寿命设计发展到现代的有限寿命设计和可靠性分析。累积损伤理论发展了解决复杂疲劳问题和揭示疲劳机理的新方法。在第9章中, 介绍了宏观意义的损伤力学, 本节将讨论细观机制的损伤力学, 后者试图从细观损伤的物理分析出发, 建立相关的细观统计断裂力学理论。

导致材料细观破坏的不可逆速率过程的区域包含许多微损伤, 它们发生在 $0.1 \sim 100 \mu\text{m}$ 量级的细观尺度范围内, 单一的宏观能量平衡所得到的断裂能不再是材料的本征参数, 材料细观破坏的速率过程包括塑性流动、相变、微孔洞、微裂纹和剪切带等形式。所以, Gurson 提出了统计平均意义下的损伤破坏的连续性描述。应用含孔洞弹—塑性固体 Gurson 模型进行了累积损伤评估。孔洞长大是塑性变形引起的。

10.4.1 含孔洞材料的弹性模型

疲劳失效的宏观特征一般表现为, 在交变载荷的持续作用下, 材料的承载能力不断下降, 材料刚度逐渐降低以至最终完全丧失的过程。因此选择与介质刚度相关的内变量来描述损伤, 就成为一种最直接的做法。针对含孔洞材料, 采用损伤度 D 作为描述材料损伤的变量。损伤度 D 反映材料的刚度下降比例。

对于各向同性线弹性损伤材料, 其应力—应变关系可以设为

$$\sigma_{ij} = S_{ijkl}(1 - D)\epsilon_{kl} \quad (10 - 43)$$

式中, σ_{ij} 为特征应力; ϵ_{kl} 为特征应变; 损伤度 $0 \leq D \leq 1$; S_{ijkl} 为弹性张量, 其含义为

$$S_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (10 - 44)$$

式中, λ 和 μ 为 Lamé 常数; δ_{ij} 为 Kronecker 符号。

含孔洞弹性材料的寿命评估可以借助有限元或其他数值程序进行应力或应变计算, 结合疲劳分析程序, 在计算出应力或应变水平之后, 可以预测剩余寿命。

10.4.2 含孔洞材料的弹塑性模型

Gurson (1975) 本构模型的发展是为了模拟通过空穴形核和长大的累积微观断裂, 它已被扩展应用于模拟金属的延性断裂。他摒弃了无限大基体的假设, 提出了有限大基体含微孔洞的胞模型。这种模型更加接近于真实的材料细观结构, 为损伤的描述 (如作为损伤变量的孔洞体积百分比) 以及宏观体积膨胀的塑性理论的建立奠定了基础。Gurson 给出了四种微孔洞的胞模型, 第二种构元如图 10-6 所示。在 Gurson 模型中损伤被视为各向同性的, 损伤变量用一个标量

即孔洞体积百分比 f^* 来表示。

材料包含基体和空穴,应用体积分数 f 、空穴体积分数和基体材料的累积塑性应变是模型中的内变量。本构模型的起点是对变形率张量分解成为弹性和塑性部分后求和。在次弹性应力率关系中采用 Cauchy 应力的 Jaumann 率 (模量一般取常数和各向同性), 并且塑性流动方程基于 Cauchy 应力, 应用 von

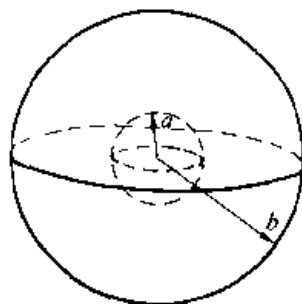


图 10-6 Gurson 胞模型的第二种单元——有限球体中的球形孔洞单元

Mises 的屈服条件。给出 Gurson 模型下的屈服条件为

$$\Phi = \frac{\sigma_e^2}{\sigma^2} + 2f^* \beta_1 \cosh\left(\frac{\beta_2 \sigma : I}{2\sigma}\right) - 1 - (\beta_1 f^*)^2 = 0 \quad (10-45)$$

式中, Φ 为屈服函数; $\bar{\sigma}$ 为基体材料中的等效应力; β_1 和 β_2 为修正参数。

有效宏观 Cauchy 应力 σ_e 为

$$\sigma_e = \left(\frac{3}{2} \sigma^{\text{dev}} : \sigma^{\text{dev}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10-46)$$

式中, σ^{dev} 为偏量 Cauchy 应力, $\sigma^{\text{dev}} = \sigma - \frac{1}{3} \text{trace}(\sigma) I$ 。

在 Gurson 的原始模型中, 参数 f^* 是简单的孔洞体积百分比 f 。在 Tvergaard—Needleman 的方法中, 当孔洞体积百分比达到临界值 f_c 时, 引入修正后给出为

$$f^* = \begin{cases} f & f \leq f_c \\ f_c + (f_u - f_c)(f - f_c)/(f_t - f_c) & f > f_c \end{cases} \quad (10-47)$$

式中, $f_u = 1/\beta_1$ 和 $f^*(f_t) = f_u$ 。注意 f_t 是在材料完全丧失承载能力时的孔洞体积百分比。

由于 Gurson 模型的突出优点, 在该模型建立之后的 20 年时间里得到了广泛的应用。仅从这一方面评论, Gurson 模型就是最成功的损伤模型之一。

10.4.3 含微孔洞的铝合金铸件实例

具有微观孔洞的铝合金铸件可以作为含损伤的材料, 其损伤度就是铸件的微观孔洞的百分比。通过耦合铸件凝固过程宏观—微观模拟的结果, 可以应用计算程序对其进行应力—应变分析和弹性疲劳寿命预测。这里主要是应用 Gurson 模型和屈服条件进行铸件源于微观孔洞的累积损伤评估。

为了应用 Gurson 模型研究含孔洞铝合金材料的应力—应变情况, 选取一个含中心圆孔的单位厚度矩形板作为研究对象。矩形板的尺寸为 $50\text{mm} \times 20\text{mm}$,

如图 10-7 所示。网格剖分采用 8 节点的平面应变单元，网格大小 $2\text{mm} \times 2\text{mm}$ 。截面的左端固定，右端在 x 方向施加拉力，载荷大小为 100MPa 。

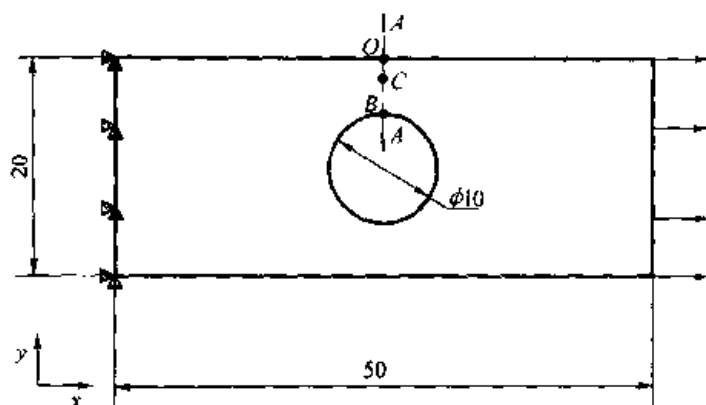


图 10-7 带中心孔的矩形框的尺寸、载荷及边界条件

在孔洞体积百分比分别为 0%，5% 和 10% 时，有限元应力计算分析的结果如图 10-8 所示。随着孔洞体积百分比的增加，在 B 点处的应力降低，与 $f^* = 0\%$ 的 σ_{11} 相比， $f^* = 10\%$ 时的 σ_{11} 降低了 17%。因为 Gurson 模型是为了模拟通过空穴形核和长大的累积微观断裂，当应力超过屈服强度进入塑性，材料发生塑性变形，就会发生孔洞形核和长大，构成损伤；如果材料中已经存在孔洞，就会进一步长大。由于孔洞形核和长大，降低了材料的承载能力，使该处的应力水平降低。在循环应力作用下，随着循环次数增加，孔洞不断长大，孔洞体积百分数也不断增加，材料的损伤不断累积，直到该胞元失去了承载能力。这种局部胞元应力水平下降是以其他区域胞元应力水平上升为代价的，从而形成内力的再分配，或者发生应力集中。如图 10-8 中靠近点 O 附近处节点的应力增加，这是由

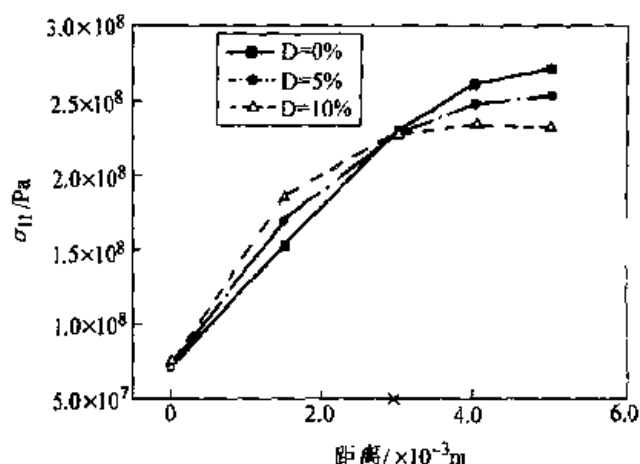


图 10-8 不同孔洞体积百分比下沿着路径 A-A 应力分析结果的对比

于 B 点处孔洞形核和长大降低了该处材料的承载能力而应力水平降低, 为了保持截面上应力的合力与外力平衡, 需要其他区域的应力水平相应地提高, 如靠近点 O 处节点的应力水平提高。

在微观的尺度上解释损伤, 为产生非连续的微表面上原子键的断裂和微孔洞的塑性扩展。无论是韧性断裂形式还是脆性断裂形式, 其初始变形是原子键的塑性微应变导致的。事实上, 晶体是由大量的原子有序排列而成的, 材料的强度来源于原子间的相互作用, 而塑性变形来源于原子间的相互运动 (如位错)。因此, 对固体断裂过程的本质理解必须在细观力学与纳观力学的结合角度上才能实现。细观破坏的四种基本模式 (微孔洞、微裂纹、界面失效和局部化变形带) 的起源和演化描述必须在纳观尺度才能完全阐明, 其破坏状态的力学描述借助于物理的失效模式 (如原子结合力或势), 从宏观到细观再到纳观的层次不断深入, 将导致从破坏的唯像认识到损伤机制再到断裂物理的概念突破。此时, 将连续介质力学与分子动力学结合成为断裂力学与损伤力学的跨尺度计算分析的有效研究工具。

10.5 小结

在固体力学中, 人们对结构失效的研究经历了 3 个阶段。第一阶段是弹塑性力学阶段, 材料为理想均匀, 没有任何缺陷的连续介质, 通过弹塑性分析按照经典的强度理论判断结构是否失效。第二个阶段是断裂力学阶段, 研究材料或结构中存在裂纹的问题, 但是仍将裂纹周围材料视为均匀的连续介质。断裂力学是以裂纹存在为前提, 适用于研究裂纹形成之后所发生的问题, 对材料开始劣化到裂纹形成之间的力学行为和物理过程并未进行理论分析和描述。第三阶段是现代破坏力学阶段, 在断裂力学基础上, 引入考虑材料细观缺陷发生和发展演化过程的损伤力学, 形成以宏观、细观、微观相结合的现代破坏力学框架。破坏力学为固体力学的发展注入了新的活力, 标志着人们对材料破坏过程的认识更加深刻。

工程材料内部往往存在着大量弥散分布的细观缺陷, 在外部因素 (如外力、温度等) 作用下损伤将逐渐演化, 如微缺陷不断汇集并合成大的裂纹, 孔洞的不断长大等。然而, 断裂试验表明, 其逆过程也存在, 即母裂纹在扩展过程中滋生子裂纹和孙裂纹。材料的破坏往往就是由于损伤的集中化发展, 最终形成宏观裂纹。在宏观裂纹形成之后, 细观损伤仍在不断演化, 并推动宏观裂纹的发展, 而宏观裂纹在扩展过程中所选择的路径, 往往是细观损伤高度集中的区域, 即高应力集度区。图 10-9 展示了损伤力学与断裂力学的关系。损伤力学主要研究的是材料中分布的细观缺陷的构成和发展及其演化规律, 而断裂力学则忽略在宏观裂

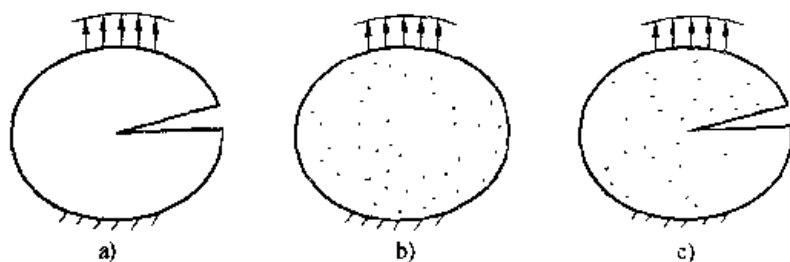


图 10-9 断裂力学、损伤力学和破坏力学的宏观裂纹与细观缺陷

纹形成之前的损伤阶段，也忽略裂纹扩展过程中周围的损伤，只考虑理想的宏观缺陷，即假设裂纹存在，研究裂纹的起裂和扩展问题。显然，如果将损伤力学与断裂力学结合起来，可以更好地描述材料破坏的实际过程。在尺度上从细观到宏观，在机理上从过程到结果，由此形成了一门新的学科，考虑材料或者结构损伤 (damage) 的断裂力学 (fracture mechanics)，称为破坏力学 (failure mechanics)，这个名词已经被固体力学家所接受。

研究结构的破坏，重要的目标之一是建立材料破坏的判别准则。在早期的弹塑性力学阶段，有四个熟悉的用最大主应力或用应力分量的组合表示的强度理论，构成强度失效准则。在线弹性断裂力学中，有应力强度因子准则，如 $K_I = K_{Ic}$ ，以及与之相等效的能量释放率准则，如 $G = G_C$ ，其中 K_I 和 G 代表了外界对裂纹的驱动力，而 K_{Ic} 和 G_C 代表了材料抵抗断裂的能力，如第 2 章所述。在弹塑性断裂力学中，有 J 积分准则、裂纹张开位移准则等判断裂纹的扩展或止裂，如第 3 章所述。现代破坏力学的研究目的是在考虑损伤的情况下寻求控制裂纹扩展的参数，进而建立更具有普遍意义的破坏准则。

在引入损伤之后，对裂纹的分析将变得更为复杂，同时也期待它能够解释经典断裂力学难以解释的一些问题，如裂纹前面过程区的行为。在经典的断裂力学中，裂纹的扩展主要表现为裂纹面的向前运动，如图 10-10a 所示。在引入损伤之后，裂纹前面和两侧将出现一个连续损伤的区域，裂纹的扩展是连续损伤的汇

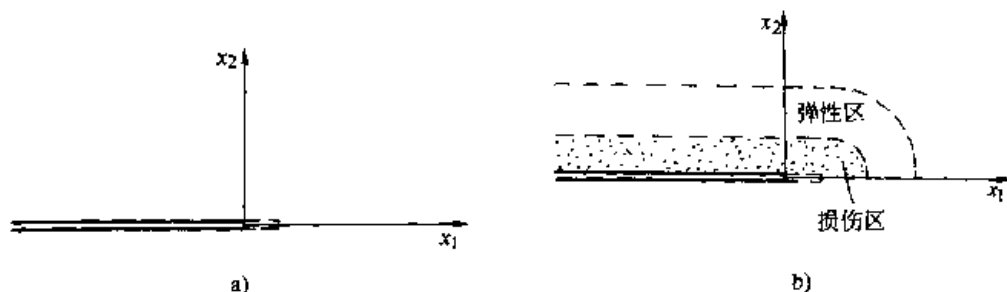


图 10-10 考虑损伤和不考虑损伤的裂纹扩展

a) 不考虑损伤 b) 考虑损伤

集而成,其扩展过程就是裂纹尖端附近材料逐渐损伤引起的损伤区(以及塑性区)移动的过程,在损伤区的外面才是弹性区,如图 10-10b。另一个例子是在弹塑性材料中裂纹动态扩展的问题,如图 10-11 所示,此时裂纹尖端温度升高,由经典断裂力学求得温度升高比实验结果高出 30%~40%。然而,在引入损伤耗能后,得到的温度结果才接近于实验值。

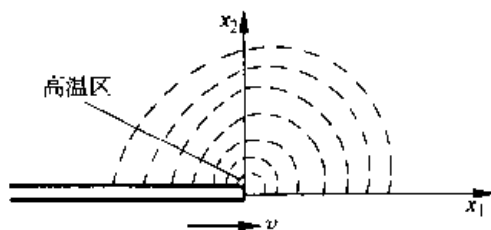


图 10-11 动态裂纹的扩展

将具有位移间断的断裂力学与含非均匀分布缺陷的损伤力学结合起来,研究物体的破坏过程,给出更接近于实际的力学描述,赋予破坏力学更合理更真切的内容,感兴趣的读者请阅读参考文献 [32]。这一方面的研究内容刚刚起步,将人们想得出和观察到的物理现象,变成可以定性分析和定量计算的公式,并最终形成工程评估和判断准则,还有很长一段路要走,险峰处必然风光无限。

作为本章小结的本节内容也可作为全书的总结。

10.6 习题

- 10-1 比较含损伤和不含损伤的 Paris 公式的异同,说明其各自的计算方法。
- 10-2 利用材料力学或弹性力学应力集中的概念,论述含双边对称半圆缺口和轴线上圆孔的平板的疲劳裂纹扩展寿命预估问题。
- 10-3 阐述含孔洞损伤的弹性材料和弹塑性材料的计算模型和方法。
- 10-4 论述损伤力学和断裂力学的联系和区别。
- 10-5 阐述破坏力学的内涵和外延。

附录

附录 A Westergaard 应力函数法

在本书 2.3 节介绍了求解应力强度因子的一种解析方法, 称为 Westergaard 应力函数法。它是求解应力强度因子的最简单的方法之一。在介绍正文以前先要简要复习有关的弹性力学和复变函数的基本概念, 并给出一些实用公式。

A.1 线弹性力学的平面问题和反平面剪切问题

A.1.1 平面问题定义

如图 A-1 所示, z 轴为平板厚度方向。如果平板很厚, 其内部不易沿 z 方向变形, 则 $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, 这是平面应变条件。此时存在的应变只有 ϵ_x 、 ϵ_y 和 γ_{xy} ; 则应力有 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 和 σ_z 。因此, 应力—应变关系为

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0 \quad (\text{A-1})$$

可得

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (\text{A-2})$$

这里 E 是弹性模量, ν 是泊松比。

若平板很薄, 且没有 z 方向的载荷, 则沿 z 方向的应变几乎不受限制, 故有 $\sigma_z \cong \tau_{xz} \cong \tau_{yz} \cong 0$, 这是广义平面应力情形。若等号成立, 即为平面应力条件。

对于平面应变和平面应力, x 方向和 y 方向的位移分量为 u 和 v , 没有或不考虑 z 方向的位移分量 w 。所有的位移, 应变和应力分量都只是坐标 x 和 y 的函数, 故平面应变和平面应力都是二维的问题, 它们的平衡方程和几何关系均相

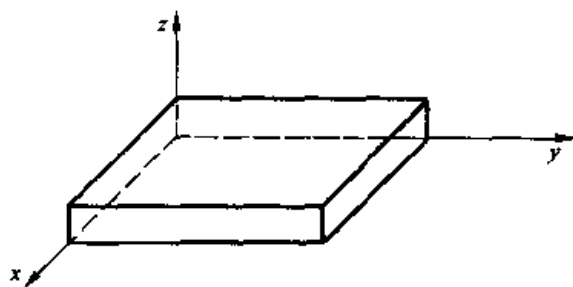


图 A-1 平板的坐标系

同，而在物理关系中仅系数有所不同，将其统称为平面问题。

如果弹性体上只有 γ_{xz} 和 γ_{yz} 两个应变分量，应力分量也只有 τ_{xz} 和 τ_{yz} 存在，它们是 x 和 y 的函数，其余的应变分量为零，这种情况称为反平面剪切问题。此时，只有 z 方向位移分量 w 存在，它也只是 x 和 y 的函数。

A.1.2 平面问题的基本方程

1. 平面问题

平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{A-3})$$

应变与位移关系

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A-4})$$

本构方程

$$\epsilon_x = \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_1 \sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \nu_1 \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\mu} \quad (\text{A-5})$$

式中， μ 为切变模量，且

$$E_1 = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} & \text{平面应变} \\ E & \text{平面应力} \end{cases}$$

$$\nu_1 = \begin{cases} \frac{\nu}{1-\nu} & \text{平面应变} \\ \nu & \text{平面应力} \end{cases}$$

应力函数定义为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \quad (\text{A-6})$$

将式 (A-6) 代入平衡方程 (A-3)，可以自动得到满足。

协调方程

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (\text{A-7})$$

将式 (A-5) 和式 (A-6) 代入协调方程 (A-7) 中，可得到双调和方程为

$$\nabla^4 \Psi = \nabla^2 (\nabla^2 \Psi) = 0 \quad (\text{A-8})$$

当采用极坐标时，应力函数 Ψ 和应力分量的关系成为

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \quad (\text{A-9})$$

此时双调和方程 (A-8) 仍然成立。但是 Laplace 算子用极坐标表示如下：

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (\text{A-10})$$

2. 反平面剪切问题

另一种特殊情况是只有 z 方向的位移分量 w ，并且 w 只是 x 和 y 的函数，这是反平面剪切问题。此时存在的应变仅有 γ_{xz} 和 γ_{yz} 与位移 w 的关系为

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{A-11})$$

应力—应变的关系为

$$\tau_{xz} = \mu \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = \mu \gamma_{yz} \quad (\text{A-12})$$

将式 (A-11) 和式 (A-12) 代入平衡方程

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (\text{A-13})$$

而得到调和方程

$$\nabla^2 w = 0 \quad (\text{A-14})$$

当采用极坐标时，调和方程 (A-14) 仍然成立。但应变分量为 γ_{rz} 和 $\gamma_{\theta z}$ ，与位移的关系为

$$\tau_{rz} = \mu \gamma_{rz} = \mu \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \tau_{\theta z} = \mu \gamma_{\theta z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (\text{A-15})$$

双调和方程 (A-8) 与调和方程 (A-14) 分别为平面问题和反平面剪切问题的控制方程。只要能得出控制方程的解，并使其解满足边界条件，则应力分量、应变分量和位移分量都可以求得。但实际上这种求解过程是非常复杂和困难的，能够解决的问题是非常有限的。

A.1.3 应力转换关系

应力转换的通用形式可用张量符号表示如下

$$\sigma'_{ij} = l_{im} l_{jn} \sigma_{mn} \quad (\text{A-16})$$

式中， σ'_{ij} 和 σ_{mn} 代表不同坐标系的应力分量，式 (A-16) 的等号右边的符号若有下标重复出现，就表示将其所有分量求和。如图 A-2 所示，这里 l_{ij} 为 $\hat{i}$ 和 $\hat{j}$ 两个方向夹角的余弦，称为方向余弦。则在直角坐标系转换为极坐标系时，有下列方向余弦：

$$l_{rx} = \cos \theta, \quad l_{ry} = \sin \theta,$$

$$l_{\theta x} = -\sin \theta, \quad l_{\theta y} = \cos \theta$$

因此，极坐标系的应力分量与直角坐标系的应力分量的关系如下

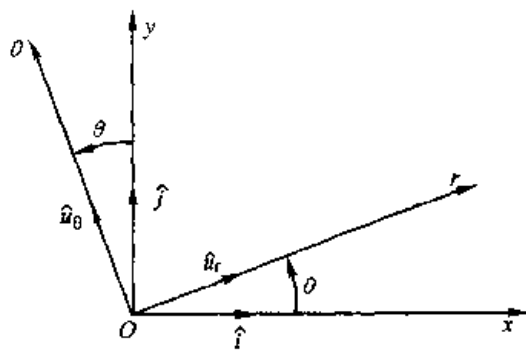


图 A-2 坐标转换

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos \theta \sin \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-17})$$

反平面剪切问题的应力转换也同样可用式 (A-16) 求得。

A.1.4 主应力

应用如图 A-3 所示的摩尔圆, 可求得主应力 σ_1 和 σ_2 分别为

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (\text{A-18})$$

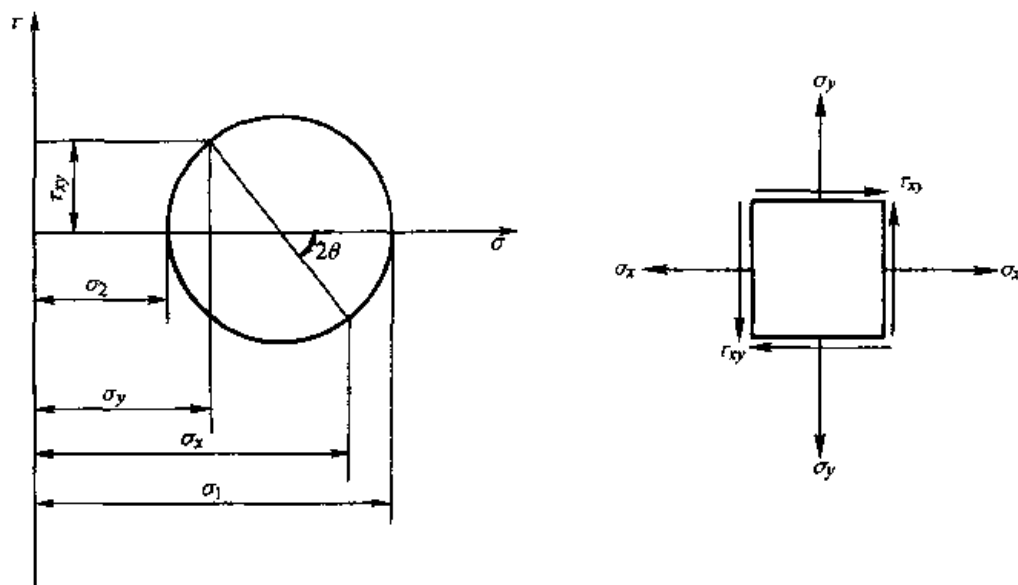


图 A-3 摩尔圆

A.2 复变应力函数

A.2.1 复变函数基本定义

定义复变数

$$z = x + iy \quad (\text{A-19})$$

它的共轭复变数为

$$\bar{z} = x - iy \quad (\text{A-20})$$

一个实函数若是变数 x 和 y 的函数, 利用式 (A-19) 和式 (A-20) 将变数 x 和 y 改为 z 和 $\bar{z}$ 后, 此函数写成新函数形式时仍具有实值。因此, 双调和方程中的 Airy 应力函数 $\Psi(x, y)$ 可改写为

$$\Psi(x, y) = \Psi(x(z, \bar{z}), y(z, \bar{z})) = \Phi(z, \bar{z}) \quad (\text{A-21})$$

若是反平面剪切问题, 其惟一的位移分量 w 可改写成

$$w(x, y) = W(z, \bar{z}) \quad (\text{A-22})$$

尽管 w 和 W 的值相等, 但函数形式不同。为了表达方便起见, 下面均用符号 w 来代替 W 。

A.2.2 平面问题

[例题 A-1] 试证双调和方程式 (A-8) 可改写成

$$\frac{\partial^4 \Phi(z, \bar{z})}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0 \quad (\text{A-23})$$

证明: 由式 (A-19) 和式 (A-20) 得到

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (\text{a})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \quad (\text{b})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \quad (\text{c})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = - \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 = - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \quad (\text{d})$$

由上面的后两式相加后再平方, 可得

$$\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 = \left(4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \right)^2 = 16 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} \quad (\text{e})$$

所以

$$\nabla^4 \Psi = 16 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0$$

故双调和方程可改写成式 (A-23), 证明完毕。

对式 (A-23) 积分 4 次, 方程的通解为

$$\Phi(z, \bar{z}) = f_1(z) + f_2(\bar{z}) + z f_3(\bar{z}) + \bar{z} f_4(z) \quad (\text{A-24})$$

因为函数 Φ 具有实值, 故函数间有下列关系:

$$\overline{f_1(z)} = f_2(\bar{z}), f_3(\bar{z}) = \overline{f_4(z)}$$

所以在式 (A-24) 中, 等号右边只有两个独立的复变函数, 其通解可以改写为

$$\Phi(z, \bar{z}) = f_1(z) + \overline{f_1(z)} + z \overline{f_4(z)} + \bar{z} f_4(z) \quad (\text{A-25})$$

为了表达方便, 设 $f_1(z) = \phi(z)/2$, $f_4(z) = \psi(z)/2$, 则上式成为

$$\Phi(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} [\phi(z) + \overline{\phi(z)} + \bar{z} \psi(z) + z \overline{\psi(z)}]$$

或

$$\Phi(z, \bar{z}) = \text{Re}[\phi(z) + \bar{z} \psi(z)] \quad (\text{A-26})$$

式中, Re 代表函数的实部, Im 代表虚部。由式 (A-6) 和例题 A-1 的式 (c)

和 (d), 可得

$$\sigma_x + \sigma_y = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi = 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \bar{z}}$$

同理, 可得

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \Psi = 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

将式 (A-26) 分别代入上面两式并求导数, 最后可得

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\psi'(z) + \overline{\psi'(\bar{z})}] \quad (\text{A-27})$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\phi''(z) + \overline{z\psi''(\bar{z})}] \quad (\text{A-28})$$

应用同样的方法可得到位移的复变函数表达式, 其推导过程比较麻烦, 因此这里不再推导, 而留作习题。位移的表达式为

$$2\mu(u + iv) = \kappa\psi(z) - z\overline{\psi'(z)} - \overline{\phi'(z)} \quad (\text{A-29})$$

当平面应变时, $\kappa = 3 - 4\nu$; 当平面应力时, $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ 。

A.2.3 反平面剪切问题

仿照平面问题的方法, 同理可得到反平面剪切问题中位移和应力分量的复变函数表达式

$$\omega = \text{Re}[f(z)] \quad (\text{A-30})$$

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \mu f'(z) \quad (\text{A-31})$$

应用复变应力函数方法, 将本来求解双调和方程或调和方程, 改为寻找满足边界条件的复变应力函数。对 I 型或 II 型裂纹问题, 式 (A-27) 至式 (A-29) 还可以简化为只用一个复变函数表达式。此复变函数称为 Westergaard 应力函数。

A.3 Westergaard 应力函数

A.3.1 I 型裂纹

在 x 轴上, 若有 $\tau_{xy} = 0$ 和 $\sigma_x = \sigma_y$, 由式 (A-28) 可得

$$[\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}]_{y=0} = 2[\phi''(x) + x\psi''(x)] = 0$$

取 $\phi''(z) = -z\psi''(z)$ 可满足上式。因此, 式 (A-28) 可用一个复变函数 $\psi(z)$ 的二阶导数来表达, 即

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = -4iy\psi''(z) \quad (\text{A-32})$$

由式 (A-27) 和式 (A-32) 联立求解可得

$$\begin{cases} \sigma_x = 2\{\text{Re}[\psi'(z)] - y\text{Im}[\psi''(z)]\} \\ \sigma_y = 2\{\text{Re}[\psi'(z)] + y\text{Im}[\psi''(z)]\} \\ \tau_{xy} = -2y\text{Re}[\psi''(z)] \end{cases}$$

定义一个复变函数

$$Z_I(z) = 2\psi'(z)$$

代入上式则有

$$\begin{cases} \sigma_x = \operatorname{Re} [Z_I] - y \operatorname{Im} [Z'_I] \\ \sigma_y = \operatorname{Re} [Z_I] + y \operatorname{Im} [Z'_I] \\ \tau_{xy} = -y \operatorname{Re} [Z'_I] \end{cases} \quad (\text{A-33})$$

这里

$$Z'_I(z) = \frac{dZ_I(z)}{dz} \quad (\text{A-34})$$

若设

$$Z_I(z) = \frac{d\tilde{Z}_I(z)}{dz} \quad (\text{A-35})$$

则位移表达式 (A-29) 可成为

$$\begin{cases} 2\mu u = \frac{\kappa-1}{2} \operatorname{Re} [\tilde{Z}_I] - y \operatorname{Im} [Z_I] \\ 2\mu v = \frac{\kappa+1}{2} \operatorname{Im} [\tilde{Z}_I] - y \operatorname{Re} [Z_I] \end{cases} \quad (\text{A-36})$$

对于 I 型裂纹, 若裂纹位于 x 轴上, 则恒有 $\tau_{xy}|_{y=0}=0$, 而 σ_x 不一定等于 σ_y 。但总可以叠加上一个 x 方向的正应力, 而使在 x 轴上有 $\sigma_x = \sigma_y$ 的关系。由于裂纹尖端存在应力奇异性, 叠加上一个有界的正应力, 并不影响裂纹尖端的应力场和位移场。

A.3.2 II 型裂纹

对于 II 型裂纹, 此时有 $\sigma_y|_{y=0}=0$ 的限制。仿照 I 型裂纹的方法, 并取

$$\psi'(z) = -\frac{i}{2} Z_{II}(z) \quad (\text{A-37})$$

可得

$$\begin{cases} \sigma_x = 2\operatorname{Im} Z_{II} + y \operatorname{Re} Z'_{II} \\ \sigma_y = -y \operatorname{Re} Z'_{II} \\ \tau_{xy} = \operatorname{Re} Z_{II} - y \operatorname{Im} Z'_{II} \end{cases} \quad (\text{A-38})$$

$$\begin{cases} 2\mu u = \frac{\kappa+1}{2} \operatorname{Im} \tilde{Z}_{II} + y \operatorname{Re} Z_{II} \\ 2\mu v = -\frac{\kappa-1}{2} \operatorname{Re} \tilde{Z}_{II} - y \operatorname{Im} Z_{II} \end{cases} \quad (\text{A-39})$$

式中的符号意义与 I 型裂纹是相同的, 只是去掉了实部和虚部后面的中括号。

上述结果是著名力学家 Westergaard 首先得到的, 因此, Z_I 和 Z_{II} 称为 Westergaard 应力函数。要求得满足边界条件的 Westergaard 应力函数是相当不容易的, 难度已超出本书范围。因此, 下面是给出 Westergaard 应力函数, 验证其是否满足裂纹问题的边界条件, 最后用式 (A-33) 或式 (A-38) 求得裂纹尖端的应力场, 并找出应力强度因子。

A.4 基本裂纹问题

Westergaard 应力函数法用于解决带裂纹的无限大平板问题相对比较容易, 下面的例题均属于这类问题。

[例题 A-2] 考虑无限大平板带有穿透板厚的中心裂纹, 受到在无限远处的双向均匀拉伸应力的作用, 如图 A-4 所示。试验证

$$Z_I(z) = \frac{\sigma_z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (\text{A-40})$$

为满足边界条件的 Westergaard 应力函数。并求裂纹尖端区的应力场和位移场。

解: 如图 A-4 所示, 若没有 x 方向的拉伸应力, 本题即为 Griffith 裂纹问题。式 (A-40) 所给出的应力函数是以裂纹中心为原点的直角坐标系的函数。这里均匀拉伸应力为 σ , 裂纹半长度为 a , 由式 (A-40) 可得

$$Z'_I(z) = \frac{-\sigma a^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \quad (\text{a})$$

$$\tilde{Z}_I(z) = \sigma \sqrt{z^2 - a^2} \quad (\text{b})$$

利用式 (A-33) 中的各式来验证是否满足下列边界条件和特殊条件:

- (1) 当 $|x| \rightarrow \infty$, $(\sigma_x)_\infty \rightarrow \sigma$
- (2) 当 $|y| \rightarrow \infty$, $(\sigma_y)_\infty \rightarrow \sigma$
- (3) 当 $y=0$ 时, $\tau_{xy}=0$ 和 $\sigma_x = \sigma_y$ 。
- (4) 当 $y=0$ 时, 且 $|x| < a$ 时, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$, 即裂纹表面为应力自由。

必须满足条件 (3), 才可以使用式 (A-33), 它是几何对称和载荷对称的条件。需要注意的是在裂纹表面上 σ_y 等于零, 而 σ_x 在裂纹表面上无定义。因

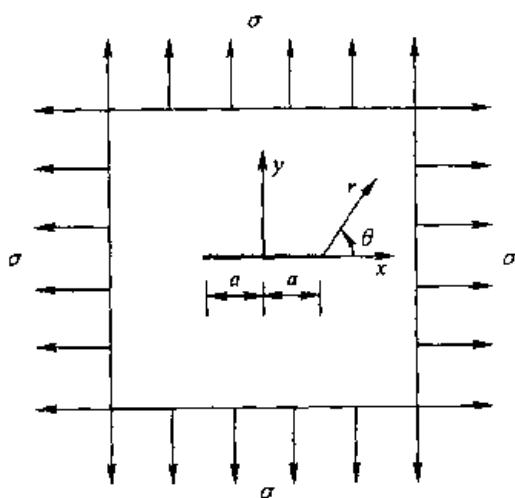


图 A-4 带中心裂纹的无限大平板受到双向拉伸

此, 条件 (3) 仍然可以说是满足的。

利用式 (A-33)、式 (A-40) 和例题 A-2 中的式 (a), 很容易验证边界条件 (1) 和 (2)。

当 $y=0$ 时, $\tau_{xy}=0$ 恒成立, 因此, 最后要验证的是在裂纹面上 ($|x| < a$) 有 $\sigma_y=0$ 。证明如下:

$$\sigma_y(x, 0) = \operatorname{Re}[Z_I]_{y=0} = \operatorname{Re}\left[\frac{\sigma x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right] = \operatorname{Re}[\text{纯虚数值的函数}] = 0$$

因此, 由式 (A-40) 和应力表达式 (A-33)、位移表达式 (A-36) 所得到的解答是精确解。因为裂纹关于 y 轴对称, 只需考虑一个裂纹尖端区的应力场和位移场即可。现在考虑 $z=a$ 处的裂纹端点, 设

$$z = a + re^{i\theta} \quad (c)$$

此处, (r, θ) 是以 $z=a$ 裂纹尖端为原点的极坐标。在裂纹端点区, 即 $r \ll a$, 取首项可得

$$Z_I = \frac{\sigma(a + re^{i\theta})}{\sqrt{(a + re^{i\theta})^2 - a^2}} \approx \frac{\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} e^{-\frac{1}{2}i\theta} = \frac{\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (d)$$

$$Z'_I = -\frac{\sigma a^2}{[(a + re^{i\theta})^2 - a^2]^{\frac{3}{2}}} \approx -\frac{\sigma\sqrt{a}}{(2r)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{3}{2}i\theta} = -\frac{\sigma\sqrt{a}}{(2r)^{\frac{3}{2}}} \left(\cos \frac{3\theta}{2} - i \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (e)$$

$$\tilde{Z}_I = \sigma \sqrt{(a + re^{i\theta})^2 - a^2} = \sigma \sqrt{2ar} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (f)$$

由式 (A-33) 中各式和 $y = r \sin \theta$, 可得裂纹端点的应力为

$$\sigma_x = \frac{\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (g)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (h)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (i)$$

由式 (A-36) 中各式, 可得裂纹端点的位移为

$$2\mu u = \sigma\sqrt{a} \left(\frac{r}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[(\kappa - 1) + 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \cos \frac{\theta}{2} \quad (j)$$

$$2\mu v = \sigma\sqrt{a} \left(\frac{r}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[(\kappa + 1) - 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \quad (k)$$

将上面式 (g) 至式 (i) 三式与式 (2-12) 进行比较, 可知此时应力强度因子为

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (A-41)$$

在裂纹端点区 $z=a$ 处的应力场可以改写成为式 (2-12), 和位移场可以改写成为式 (2-17) 的 I 型裂纹解答部分。

【例题 A-3】 如图 A-5a 所示, 无限大平板有一中心裂纹。裂纹面上 $x=b$ 处作用有一对拉伸集中力 F (力/单位厚度)。试证

$$Z_I = \frac{F \sqrt{a^2 - b^2}}{\pi (z-b) \sqrt{z^2 - a^2}} \quad (1)$$

为满足边界条件的 Westergaard 应力函数, 并求裂端的应力场和位移以及应力强度因子。

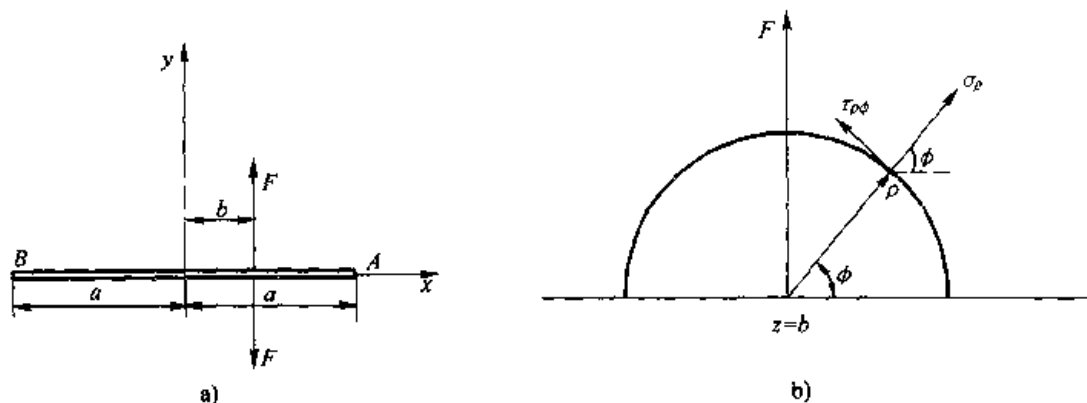


图 A-5 含中心裂纹无限大平板裂纹面上受一对集中力

a) 中心裂纹面上有集中力 b) 集中力处的半圆形单元

解: 由图 A-5a 的载荷对称情形, 显然这是张开型 (I 型) 裂纹问题。这里只验证在 $x=b$ 处的裂纹表面有集中力 F 这一边界条件, 其余部分读者可仿照前一例题自行推导。如图 A-5b, 以 $z=b$ 为原点, 画一半径为 ρ 的半圆。当 $\rho \rightarrow 0$ 时, 整个半圆上外力和内力应该保持平衡。因此, 在 x 方向和 y 方向的平衡条件分别为

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left[F + \int_0^\pi (\sigma_\rho \sin \phi + \tau_{\rho\phi} \cos \phi) \rho d\phi \right] = 0 \quad (m)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\int_0^\pi (\sigma_\rho \cos \phi - \tau_{\rho\phi} \sin \phi) \rho d\phi \right] = 0 \quad (n)$$

现在应用 Westergaard 方法给出的式 (A-33) 中各式和应力函数 (1) 来验证是否满足 (m) 和 (n) 两条件。在 $z=b$ 附近, 令

$$z' = \rho e^{i\phi}$$

则 $z = b + z'$, 这里 $\rho \ll b$ 和 $\rho \ll a$ 。

因此得到

$$Z_I = \frac{F \sqrt{a^2 - b^2}}{\pi (z-b) \sqrt{z^2 - a^2}} \approx \frac{F \sqrt{a^2 - b^2}}{\pi z' \sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{F}{i\pi z'}$$

$$Z'_I = \frac{dZ_I}{dz} = \frac{dZ_I}{dz'} \approx \frac{-F}{i\pi z'^2} \approx \frac{-Fe^{-2\phi}}{i\pi\rho^2}$$

对于 Z_I 和 Z'_I 的实部和虚部分别给出为

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Z_I &\approx -\frac{F}{\pi\rho} \sin\phi, & \operatorname{Im} Z_I &\approx -\frac{F}{\pi\rho} \cos\phi \\ \operatorname{Re} Z'_I &\approx \frac{F}{\pi\rho^2} \sin 2\phi, & \operatorname{Im} Z'_I &\approx \frac{F}{\pi\rho^2} \cos 2\phi \end{aligned}$$

所以在 $z=b$ 处的应力场为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z'_I = -\frac{2F \sin\phi \cos^2\phi}{\pi\rho} \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} Z_I + y \operatorname{Im} Z'_I = -\frac{2F \sin^3\phi}{\pi\rho} \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z'_I = -\frac{2F \sin^2\phi \cos\phi}{\pi\rho} \end{aligned}$$

上面式中，用等号取代了近似符号。通过应力转换可得

$$\sigma_\rho = \sigma_x \cos^2\phi + \sigma_y \sin^2\phi + 2\sin\phi \cos\phi \tau_{xy} = -\frac{2P \sin\phi}{\pi\rho} \quad (\text{o})$$

$$\tau_{\phi} = -\sigma_x \cos\phi \sin\phi + \sigma_y \cos\phi \sin\phi + \tau_{xy} (\cos^2\phi - \sin^2\phi) = 0 \quad (\text{p})$$

将式 (o) 和式 (p) 代入式 (m) 和 (n)，即可得到验证。关于在 $z=a$ 处裂纹尖端区的应力场和位移场，读者可仿照例 A-2 的步骤推导，将发现其形式与式 (2-12) 和式 (2-17) 的 I 型裂纹解答部分完全一样。所不同之处仅是应力强度因子的形式。此时在 A 点 ($z=a$ 处) 的应力强度因子为

$$K_A = \frac{F}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \quad (\text{A-42})$$

在 B 点的应力强度因子可把 $-b$ 取代式 (A-42) 中的 b 而得到，即

$$K_B = \frac{F}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \quad (\text{A-43})$$

式 (A-42) 和式 (A-43) 即为在第 2 章表 2-1 中第 3 栏给出的应力强度因子表达式，在这里给出了证明。

在裂纹尖端附近的应力场和位移场，其形式是固定的，在某一点的值完全由应力强度因子来决定。只要找到了应力强度因子，就等于给出了裂纹尖端区的应力场和位移场。

习题 A

A-1 在图 A-4 中，如果无穷远处的边界条件为 $\tau_{xy} = \tau$ ，试证 $Z_{II} = \tau z / \sqrt{z^2 - a^2}$ 为本

题的 Westergaard 应力函数, 并求裂纹尖端区的应力场、位移场和应力强度因子。

A-2 在图 A-5a 中, 如果集中力 F 不再垂直于裂纹表面, 而是在裂纹上表面的 F 沿着 x 方向, 而下表面的 F 沿着 x 负方向, 试证

$$Z_{II} = \frac{F \sqrt{a^2 - b^2}}{\pi (z - b) \sqrt{z^2 - a^2}}$$

为所求的应力函数, 并求裂纹尖端区的应力场、位移场和应力强度因子。

A-3 试证图 A-4 中受到双向均匀拉伸的中心裂纹, 其形状将变成椭圆。

A-4 如图 A-6 所示, 无限大平板有一半无限长的裂纹, 在距裂端为 a 处的裂纹上下表面作用有一对垂直 xy 平面的集中力 F , 试证

$$f(z) = -\frac{iF\sqrt{a}}{\pi\mu(z+a)\sqrt{z}}$$

为满足边界条件的函数, 并求裂纹尖端区的应力场、位移场以及应力强度因子。

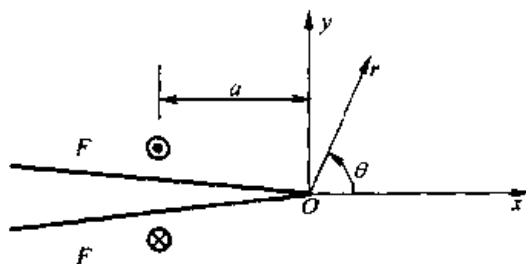


图 A-6 半无限长裂纹受到反平面集中力

附录 B J 积分

断裂力学主要是研究带裂纹体的脆性断裂和韧性断裂，如超高强钢，硬铝，钛合金，有机玻璃和环氧树脂等都是脆性的，这方面的理论在本书前面几章里已经给予充分的介绍。然而大多数金属材料都是中、低强度的，断裂前裂纹尖端区都有较大的，不可忽略的塑性变形，这时线弹性断裂力学已经不再适用，因此有必要用弹塑性力学的方法来求解这类材料的裂纹问题。但是用弹塑性力学要直接获得裂纹端点区的应力场和应变场是相当复杂和困难的。所以，必须避开直接求解裂纹端点区的应力和应变场，而改为寻找一个力学参量，此力学参量可以综合度量裂纹端点区应力和应变场的强度，并可以根据此参量来建立韧性断裂的判据，最后建立一套试验方案来验证理论的可靠性。在第3章中介绍的 J 积分就是在上述的背景下产生的。在附录 B 中将给出 J 积分的具体计算方法。

B.1 J 积分的物理意义

如图 B-1 所示的单位厚度平板，考虑一条环绕裂纹端点的积分线路 C ，线路光滑且没有交叉点，所围绕的面积在线路方向的左边。积分线路由裂纹下面一点 F 开始，沿着逆时针方向而到达对面的 F' 点。积分线路上的微元长度用 ds 代表，其外法线单位向量为 $\hat{n}$ ，同时有面力作用于 ds 上。线路内部面积为 A 。Sanders 和 Rice 先后指出：线路外部对内部做工的速率，大于或者等于储存于 A 中内能的改变率和不可恢复的损耗能量率之和。若用公式表达即为

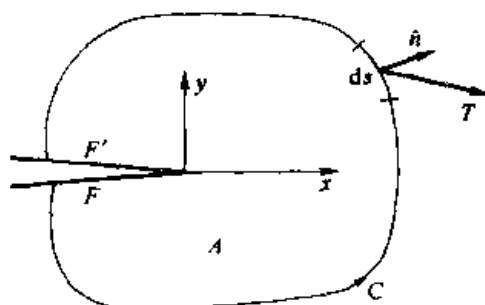


图 B-1 积分路线 C

$$\int_C T_i \frac{du_i}{dt} ds \geq \frac{d}{dt} \int_A W_1 dA + \frac{dD}{dt} \quad (B-1)$$

式中， T_i 为面力分量，与应力的关系为 $T_i = \sigma_{ij} n_j$ ； n_j 是 $\hat{n}$ 在 x 方向或 y 方向的投影； u_i 为位移分量， W_1 为内能密度， D 为损耗能。式 (B-1) 的首项有指标 i 重复出现，为张量求和，它是爱因斯坦张量符号。当大于号成立时，表示裂纹在扩展，动能在改变。现在假设是准静态，等号成立。设损耗能只用来形成新的裂纹面积，则 $dD/dt = G \cdot da/dt$ ，这里 G 是一参量， a 是裂纹长度（或半长

度), 则式 (B-1) 变成

$$\int_C T_i \frac{du_i}{dt} ds = \frac{d}{dt} \int_A W_1 dA + G \frac{da}{dt} \quad (a)$$

因为是准静态的裂纹, a 可为变数, 故

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial a} \frac{da}{dt} \quad (b)$$

将式 (b) 代入式 (a), 得到

$$\int_C T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} ds = \frac{da}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial a} \int_A W_1 dA + G \frac{da}{dt} \quad (c)$$

在准静态时, da/dt 可视为一不为零且与坐标无关的量, 故可提到积分符号外面, 并可约去。于是式 (c) 变成

$$\int_C T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds = \frac{\partial}{\partial a} \int_A W_1 dA + G \quad (d)$$

或

$$\int_C T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds = \int_A \frac{\partial W_1}{\partial a} dA + G \quad (e)$$

如图 B-2 所示, 若取原点始终在裂纹端点, 则随着裂纹准静态扩展, 当 a 增加时, x 反而减少, 故

$$dx = -da \quad \text{或} \quad \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial a} \quad (f)$$

移动各项位置, 并利用式 (f), 则式 (e) 变成

$$G = \int_A \frac{\partial W_1}{\partial x} dA - \int_C T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \quad (g)$$

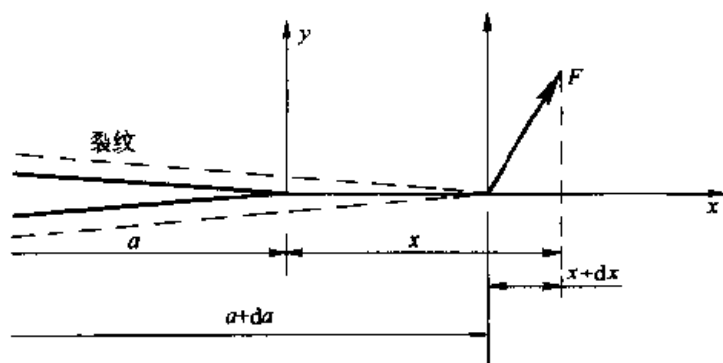


图 B-2 准静态扩展的坐标系

虽然线路 C 不封闭, 但因为裂纹上下表面的间距可视为零, 加上平面裂纹问题或反平面裂纹问题的对称性, 内能密度 W_1 在 F 和 F' 点是相同的。因此, 数学上的格林定理是适用的, 这里格林定理为

$$\int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C P dx + Q dy \quad (\text{B-2})$$

现在 $Q = W_1$, $P = 0$, 故式 (g) 变为

$$G = \int_C W_1 dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \quad (\text{h})$$

正确的说, 式 (B-1) 是 Irwin - Orowan 能量平衡公式在围绕裂纹尖端区域的形式。其基本概念仍然是 Griffith 的能量释放概念, 即能量释放在裂纹尖端处, 且用来形成新的裂纹面积, 若要释放的能量足够大, 可以形成新的裂纹面积, 则 G 必与表面能 γ_p 有关。若 (h) 右边的值不是足够大, 即不足以形成新的裂纹面积, 则 G 可用来衡量释放能量的倾向能力。按照式 (B-1) 的意义和 Sanders 的推导, 对线弹性体, G 即为 Griffith 能量释放率。对含裂纹的弹性体, 若内能只是指应变能, 则 G 代表着综合地衡量线路 C 内部应力和应变场强度的力学参量。式 (h) 是在 Rice 和 Sanders 的研究基础上首先获得, 因此用 James Rice 名字的第一个字母 J 来代表 G , 为了表达方便起见, 用符号 W 来代替 W_1 。 W 是应变能密度。这样, 式 (h) 就化为 Rice 的积分表达式

$$J = \int_C W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \quad (\text{B-3})$$

下面以平面应变 I 型裂纹为例, 对线弹性体, 如取非常靠近裂纹端点的圆形积分线路 C 时, 可证明 J 等于能量释放率 G 。如图 B-3 所示。

$$ds = r d\theta, \quad dy = r \cos \theta d\theta$$

因此, 式 (B-3) 成为

$$J = r \int_{-\pi}^{\pi} \left(W \cos \theta - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) d\theta \quad (\text{B-4})$$

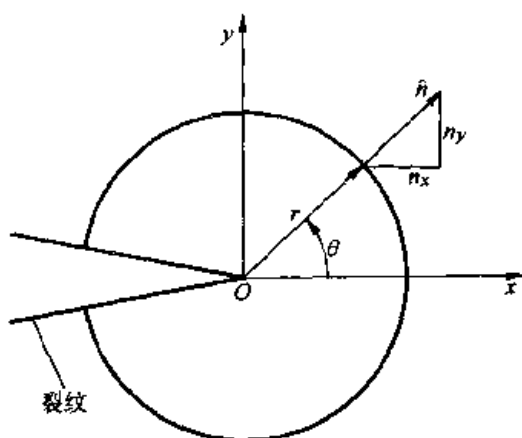


图 B-3 圆形线路

若取线路靠近裂纹端点, 则 r 很小, 故可采用线弹性断裂力学 I 型裂纹的裂纹尖端区的应力场和位移场, 见式 (2-12) 和式 (2-17) 的 I 型裂纹解答部分。

在平面应变时, 应变能密度为

$$W = \frac{k^2}{16\mu r} (3 - 4\nu - \cos \theta) (1 + \cos \theta)$$

线路 C 上的面力 T 有分量 T_x 和 T_y , 由 $n_x = \cos \theta$ 和 $n_y = \sin \theta$ (见图 B-3), 并考虑到式 (2-12), 则有

$$T_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k}{\sqrt{2}r} \left[\cos\theta \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin\theta \sin \frac{\theta}{2} \right] \\
T_y &= \sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x \\
&= \frac{k}{\sqrt{2}r} \left[\sin\theta \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin\theta \cos \frac{\theta}{2} \right]
\end{aligned}$$

利用 $\partial r / \partial x = \cos\theta$ 和 $\partial \theta / \partial x = -\sin\theta / r$, 并由式 (2-17), 可得位移分量的偏导数为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial r} \cos\theta + \frac{\partial u}{r \partial \theta} \sin\theta \\
&= \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \frac{k}{\sqrt{2}r} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{3}{2} - 2\nu - \frac{1}{2} \cos\theta - \sin^2\theta \right) \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial r} \cos\theta - \frac{\partial v}{r \partial \theta} \sin\theta \\
&= \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \frac{k}{\sqrt{2}r} \sin \frac{\theta}{2} \left(-\frac{3}{2} + 2\nu + \frac{1}{2} \cos\theta - \sin^2\theta \right)
\end{aligned}$$

对式 (B-4) 的第一项积分可得

$$I_1 = r \int_{-\pi}^{\pi} W \cos\theta d\theta = \frac{\pi(1+\nu)(1-2\nu)k^2}{4E}$$

对式 (B-4) 的第二项积分可得

$$I_2 = -r \int_{-\pi}^{\pi} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} d\theta = -\frac{\pi(1+\nu) \left(-\frac{3}{2} + \nu \right) k^2}{2E}$$

最后得到 J 积分值

$$J = I_1 + I_2 = \frac{\pi(1-\nu^2)k^2}{E} = G_I \quad (\text{B-5})$$

式 (B-5) 证明了线弹性体平面应变 I 型裂纹端点区的 J 积分值等于能量释放率。

以上证明所取的积分线路是以裂端为原点的圆形线路, 如果线路不同, 计算结果是否仍然相同? 下一节将证明 J 积分值与所取的线路无关, 因此不论选取哪条积分线路, 线弹性体平面应变 I 型裂纹的 J 积分值恒等于能量释放率。此关系式在平面应力时也成立。对于 II 型裂纹和 III 型裂纹, 以及复合型裂纹, 类似的关系仍然存在, 故有等式 (3-13) 至等式 (3-15), 即

$$J_K = G_K \quad (K = \text{I}, \text{II}, \text{III}) \quad (\text{B-6})$$

这些关系式的成立是基于 Irwin 的假设, 即裂纹沿着原来的方向扩展, 从而建立

了 G 与应力强度因子的关系。

如果裂纹端点的塑性区已大到不可忽略, 此时所计算的 J 积分值是否仍然和线弹性体的结果一样? 可以想象, 当塑性变形比较小时 (小范围屈服), 虽然塑性区内的应力场、位移场均不清楚, 但塑性区外仍可用线弹性力学计算的结果来近似地表达, 于是式 (B-6) 仍然成立。若是塑性变形相当大, 此时应力强度因子已不再能够表达裂纹尖端应力场的强度, 线弹性力学给出的应力场和位移场在塑性区外也一样不适用, 因此, 式 (B-6) 不再成立。这时 J 积分就成为衡量有塑性变形时裂纹尖端区应力和应变场强度的力学参量。由于 J 积分可以适用于弹塑性变形的情况, 而避免直接计算复杂的裂纹尖端区应力场和位移场, 这就是 J 积分对断裂力学的重大贡献。

B.2 J 积分的线路无关性

在证明 $J = G$ 时, 所以能够采用接近裂纹尖端的圆形线路, 其原因是 J 积分值与所选择的线路无关。只要线路的起点都在裂纹表面上, 线路光滑无交点, 则 J 积分值就不变。下面将证明 J 积分的线路无关性。

如图 B-4 所示, 任意选取两逆时针方向的线路 C_1 和 C_2 , 加上裂纹表面上的积分线路 C_3 (由 P' 点至 Q' 点) 和 C_4 (由 Q 点至 P 点), 可定义线路 $C = C_1 + C_3 - C_2 + C_4$, 此线路 C 是封闭回路, 见图 B-4。设封闭回路内的面积为 A , 现在欲证明

$$\int_{C_1} W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds = \int_{C_2} W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \quad (a)$$

首先来证明

$$\int_C W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds = 0 \quad (b)$$

利用格林定理式 (B-2), 可得

$$\int_C W dy = \int_A \frac{\partial W}{\partial x} dx dy \quad (c)$$

因为弹塑性应变能密度是应变分量的函数, 不论应力应变关系是线性或非线性, 恒有

$$\partial W / \partial \epsilon_{ij} = \sigma_{ij} \quad (d)$$

因此, 式 (c) 可化为

$$\int_C W dy = \int_A \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x} dx dy = \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x} dx dy \quad (e)$$

如图 B-5 所示, 线路上的任意积分元素 ds 与外法线的关系有

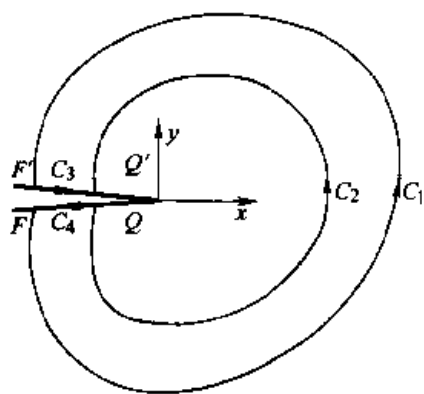


图 B-4 线性无关性证明时所取的积分回路

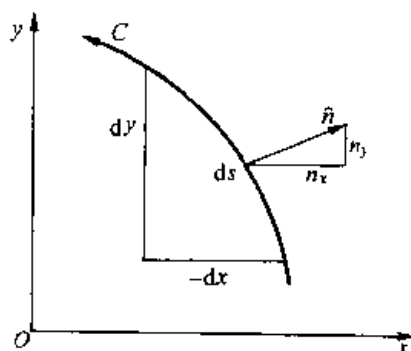


图 B-5 线路上单位积分元素与外法线单位向量

$$dy = n_x ds, \quad dx = -n_y ds \quad (f)$$

因此

$$\begin{aligned} \int_C T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds &= \int_C \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \\ &= \int_C \left[(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) \frac{\partial u}{\partial x} + (\sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x) \frac{\partial v}{\partial x} \right] ds \\ &= \int_C \left[\left(\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + \left(\sigma_y \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} \right) n_y \right] ds \\ &= \int_C (\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x}) dy - (\sigma_y \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial x}) dx \end{aligned} \quad (g)$$

由格林定理，将线积分化成为面积分

$$\begin{aligned} \int_C T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds &= \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_y \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx dy \\ &= \int_A \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. \tau_{xy} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \sigma_y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy \end{aligned} \quad (h)$$

不论是线弹性体也好，还是弹塑性体也好，平衡条件恒成立，因此，式 (h) 右侧的前两项分别为零。利用应变位移关系，式 (h) 中其余的项可化为

$$\begin{aligned} \int_C T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds &= \int_A \left(\sigma_x \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} + 2\tau_{xy} \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} \right) dx dy \\ &= \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x} dx dy \end{aligned} \quad (i)$$

因为式 (e) 等于式 (i)，因此证明了 (b) 式成立，因为在路段 C_3 和 C_4 上， $dy=0$ ，同时裂纹表面应力自由，即 $T_x=0$ 和 $T_y=0$ ，所以对积分值没有贡献，如此证明了 (b) 式的成立相当于 (a) 式的成立。 J 积分的线路无关性证明

完毕。

由于 J 积分的线路无关性, 许多裂纹问题可以通过恰当地选择线路而很容易地计算出 J 积分值来。如图 B-6 和图 B-7 所示两个例子, 无限长平板有对称的半无限长裂纹: (a) 在 $y = \pm h/2$ 施以固定位移; (b) 施固定力矩 M 于被裂纹分开的上下两个悬臂梁。

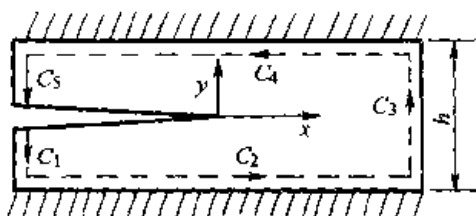


图 B-6 无限长平板有对称的
半无限长裂纹, 上下固定

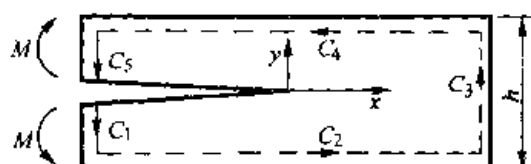


图 B-7 无限长平板有对称的
半无限长裂纹, 施加力矩

对此两个例子, 取积分线路紧贴长条板的外缘, 形状是无限长的矩形, 总线路 C 可分为 C_1 至 C_5 五个线段。

(a) 在 $y = \pm h/2$ 施以固定位移。

在 C_1 和 C_5 上的积分: 距裂纹端点甚远, 固定位移仅使 C_1 和 C_5 线段产生刚体运动, 因此, 线路上的面力恒为零, 应变能密度也为零, 对积分无贡献。

在 C_2 和 C_4 上得积分: $dy=0$, 且 $u=v=\text{常数}$, 故对积分值无贡献。

在 C_3 的积分: $n_x=1$; $n_y=0$, $dy=ds$, $\sigma_x=0$, $\tau_{xy}=0$, 但 $\sigma_y \neq 0$ 。故 $T_x = T_y=0$, $W \neq 0$ 。

$$\begin{aligned} J &= \int_C W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds = \int_{C_3} W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} W dy = W_{\infty} h \end{aligned}$$

因为 C_3 是在无穷远处, 在如图所示那样被固定位移的情形, σ_y 和 ϵ_y 均为常数值, 故 W 也为常数值。这里 W_{∞} 表示在该处为常数的应变能密度。

(b) 施以固定力矩 M 。

C_2 和 C_4 上的积分: $dy=0$, $T_x = T_y=0$, 无贡献。

C_3 上的积分: 不受力矩 M 的影响, 无应力, 无应变能密度, 故对积分无贡献。

C_1 和 C_5 上的积分: $n_x=-1$, $n_y=0$, $dy=-ds$, $\sigma_x \neq 0$, 但 $\tau_{xy} = \sigma_y = 0$, 现在

$$T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = -\sigma_x \epsilon_x$$

所以

$$\begin{aligned}
 J &= \int_C W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds = \int_{C_1+C_5} W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \\
 &= \int_{h/2}^{-h/2} (W - \sigma_x \epsilon_x) dy - \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \epsilon_x - W) dy
 \end{aligned}$$

因为 $(\sigma_x \epsilon_x - W)$ 为余能密度, 设 W_{∞}^* 为在 C_1 和 C_5 上 (相当于 $x \rightarrow -\infty$) 的平均余能密度, 则可得

$$J = W_{\infty}^* h$$

B.3 J 积分的能量解释

在本书第 3 章和附录 B.1 节里已谈过 J 积分的物理意义, 和 Griffith 弹性能释放率一样, J 积分是一种能量观念的力学参数。在 B.1 节的推导过程中, 得到单边裂纹在给定面力情形下的 J 积分为

$$J = - \frac{\partial}{\partial a} \left[\int_A W dA - \int_{C_1} T_i u_i ds \right] \quad (a)$$

这里任意积分线路 C 已被紧贴着平板边界的线路 C_1 所取代, 而整个平板面积为 A , 即线路 C_1 所包围的面积, 见图 B-8a, 这样的线路取代, 并不影响 J 积分值。在边界 Γ 上, 一部分 Γ_f 是给定面力; 另一部分 Γ_u 是给定位移。因此, 式 (a) 中的线积分部分只在 Γ_f 上积分, 而在 Γ_u 上的面力将不受裂纹长度准静态地改变的影响。这样式 (a) 可写成

$$J = - \frac{\partial}{\partial a} \left[\int_A W dA - \int_{\Gamma_f} T_i u_i ds \right] = - \frac{\partial}{\partial a} [U - L] \quad (b)$$

这里 U 是平板的总应变能, L 是外界对此弹塑性平板所做的功, 分别为上式中两个积分的值。根据总势能 V 的定义

$$V = U - L \quad (B-7)$$

所以, J 积分可表达成

$$J = - \frac{\partial V}{\partial a} \quad (B-8)$$

式 (B-8) 表明, 对于含裂纹的弹塑性板, J 积分就是当裂纹长度改变一个单位长度时, 每单位厚度势能的改变量。不论边界条件是给定面力或给定位移, 系统的势能总是随裂纹增长而减小, 即 $\partial V / \partial a$ 为负值, 故 J 积分值恒为正值。当遵守线弹性规律时, $J = G$ 。严格地说, J 积分所适用的弹塑性板是非线性弹性体或简单加载 (不要卸载) 的弹塑性体。如果在塑性变形时给予卸载, 则载荷历史将有不可忽略的影响, 此时式 (a) 不一定能成立。换句话说, 只有弹性体和简单加载的弹塑性体, 也才有式 (B-8)。对于式 (B-8), Rice 从另一角度给予严格的证明, 读者可参考文献 [33]。

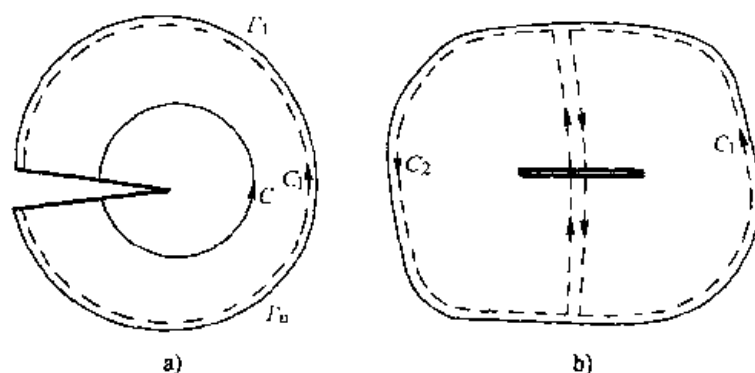
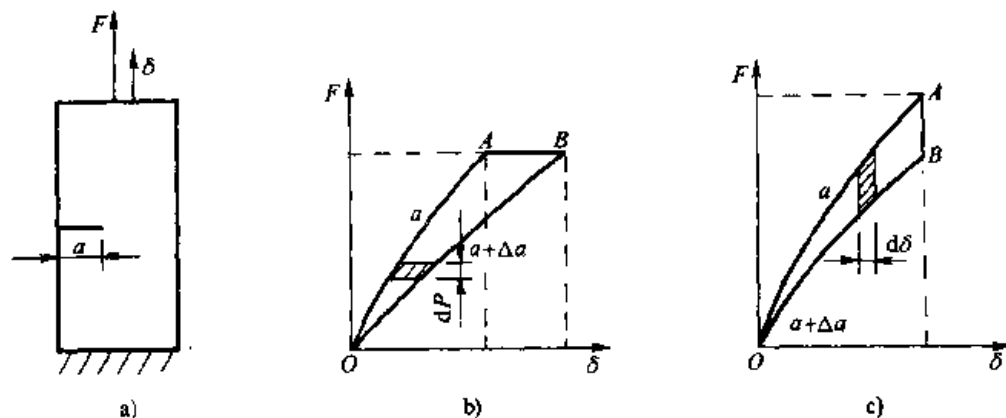


图 B-8 含裂纹的任意平板

a) 任意平板含边裂纹 b) 任意平板含内部裂纹

如果弹塑性板含有两个以上的裂纹端点（内部裂纹），见图 B-8b，环绕每一个裂纹端点，恰当地选择正方向（逆时针方向）的积分线路，则在弹塑性板内部的积分因方向相反，线路重叠而抵消，于是，围绕每个裂纹端点 J 积分值之和相当于沿着板边界积分的 J 积分值。此时式 (B-8) 依然成立，但其值代表着系统的总 J 积分值，而不是单指某一裂纹端点的值。

由于 J 积分可用式 (B-8) 表达其能量意义，因此，对只有一个裂纹端点或每个端点的 J 积分相同的弹塑性板，可利用总势能随裂纹长度的改变，来标定 J 积分与裂纹长度间的关系。如图 B-9a，考虑一块单位厚度的矩形板，有单边裂纹 a ，板的一端固定，另一端给定载荷或是给定位移。

图 B-9 J 积分的标定

a) 试样 b) 给定载荷 c) 给定位移

1. 给定载荷

如图 B-9b 所示，当 $a \rightarrow a + \Delta a$ 时， ΔV 为负值，其绝对值等于面积 OAB。在面积 OAB 内取一积分元素（阴影部分），其大小为

$$[\delta(a + \Delta a) - \delta(a)]dP$$

由此, 积分可得

$$\Delta V = - \int_0^P [\delta(a + \Delta a) - \delta(a)] dP = - \int_0^P \left(\frac{\partial \delta}{\partial a} \right) \Delta a dP$$

积分值为

$$J = - \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta a} = \int_0^P \left(\frac{\partial \delta}{\partial a} \right)_p dP \quad (\text{B-9})$$

2. 给定位移

如图 B-9c 所示, 当 $a \rightarrow a + \Delta a$ 时, ΔV 为负值, 其绝对值等于面积 OAB, 取积分元素 (阴影部分), 其大小为

$$- [P(a + \Delta a) - P(a)] d\delta$$

积分得

$$\Delta V = \int_0^\delta [P(a + \Delta a) - P(a)] d\delta = \int_0^\delta \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right)_\delta \Delta a d\delta$$

所以得 J 积分值为

$$J = - \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta a} = - \int_0^\delta \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right)_\delta d\delta \quad (\text{B-10})$$

B.4 J 积分的起裂判据

对含裂纹的非线性弹性体, J 积分起裂判据是能量释放率判据的推广。对于含裂纹的弹塑性体, 使用 J 积分判据必须小心。弹塑性体的材料在断裂前往往在裂纹尖端区甚至更大范围有相当大的塑性变形, 因此, 起裂前必须克服塑性变形才能发生裂纹扩展, 直到失稳断裂。而这种起裂后的裂纹扩展通常是亚临界的, 因此, 随着裂纹的亚临界扩展, 不可避免地在裂纹尖端区带来局部的卸载。此时, J 积分值能否继续作为衡量裂纹尖端区应力和应变场强度的力学参量, 是值得进一步研究的。所以 J 积分判据只能做简单加载含裂纹弹塑性体的起裂判据, 而不能做失稳断裂判据。关于失稳断裂的讨论请参考第 6 章中的内容。

对非线性弹性体和简单加载的弹塑性体, 裂纹起裂判据为

$$J \geq J_i \quad (\text{B-11})$$

这里, J_i 为起裂的 J 积分值。

由于 I 型裂纹是最常见的, J 积分理论也主要用于 I 型裂纹。起裂后很快发生失稳断裂的起裂 J 积分值用 J_{IC} 表示, 此时有 J 积分起裂判据或断裂判据

$$J_I \geq J_{IC} \quad (\text{B-12})$$

对大部分金属材料, 必须在相当严格的试件尺寸要求下, 才可测出常数 J_{IC} 。脆性材料的 J_{IC} 值与平面应变的 G_{IC} 值相当, 随着材料的韧性增加或试件

的尺寸不够规格, J_i 可能会偏离 G_{IC} 。因此用 $J_{IC} = K_{IC}^2/E_I$ 来换算 K_{IC} , 只在脆性断裂时才成立。对于一般中、低强度钢, 在不易测得 J_{IC} 的情况下, 通常用阻力曲线来表示 J 积分断裂韧性, 关于 J 积分阻力曲线的讨论见第 3 章。关于 J_{IC} 以及其他条件下的 J 积分值的测量标准及测试要求, 可见第 5.4 节。

B.5 J 积分与 CTOD 的关系

J 积分避开了裂纹尖端区复杂的应力和应变场的计算, 而用积分值综合衡量了应力和应变场的强度。当在裂纹尖端前有狭长条形塑性区时, 如果选择积分线路的起止点在开裂处的裂纹面上, 并让线路紧贴着塑性区边缘, 如图 B-10 所示, 则只要知道了塑性区内拉伸应力与张开位移的关系, 就可求得 J 积分与裂纹尖端张开位移 (CTOD) 的关系式。

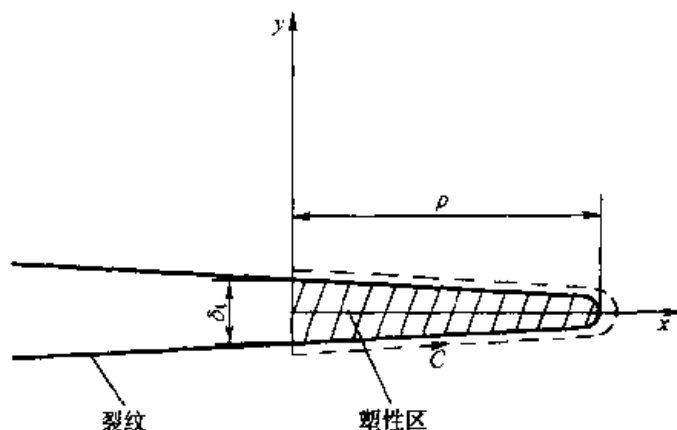


图 B-10 裂端前狭长条塑性区和积分线路

设 δ_i 符号代表 CTOD, ρ 为塑性区尺寸。由于在线路 C 上, 有 $dy \approx 0$, $n_x \approx 0$ 和 $T_x = 0$, 因此 J 积分为

$$J = - \int_C T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds = - \int_C \sigma_y n_y \frac{\partial v}{\partial x} ds = \int_C \sigma_y \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_{-\delta_i/2}^{\delta_i/2} \sigma_y dv$$

当 σ_y 和 v 对称于 x 轴时, 有

$$J = \int_{-\delta_i/2}^{\delta_i/2} \sigma_y dv = 2 \int_0^{\delta_i/2} \sigma_y dv = \int_0^{\delta_i} \sigma_y d\delta$$

这里 δ 为张开位移, 它是裂纹面上 y 方向位移分量 v 值的两倍。在塑性区, σ_y 也将是 δ 的函数, 故令 $\sigma(\delta) = \sigma_y$, 则上式变成

$$J = \int_0^{\delta_i} \sigma(\delta) d\delta \quad (B-13)$$

这样, 只要知道 $\sigma(\delta)$ 函数, 即可得到 J 与 δ_i 的关系。式 (B-13) 即为式 (3-

21)。

从微观的角度来看, $\sigma(\delta)$ 应为内聚应力, 其函数形式不易给出。实际上, 式 (B-13) 建立在宏观力学的基础上。为了工程应用的方便起见, 假设是理想弹塑性体, 其应力和应变关系见图 B-11, 此时即为 Barenblatt - Dugdale 模型, $\sigma(\delta) = \sigma_{ys}$ 。因此, 由式 (B-13) 积分可得

$$J = \sigma_{ys} \delta_t \quad (\text{B-14})$$

或

$$\delta_t = \text{CTOD} = J / \sigma_{ys} \quad (\text{B-15})$$

式 (B-14) 和式 (B-15) 分别是第 3 章中的式 (3-22) 和式 (3-23)。当小范围屈服时, $J = G$, 故式 (B-15) 与式 (3-11) 完全相同, 这里用 σ_{ys} 代替了 σ_s 。

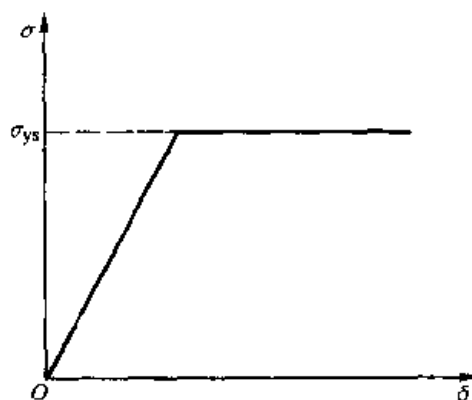


图 B-11 理想弹塑性关系

习题 B

B-1 在选择恰当的积分线路后, 试计算固定载荷的双悬臂梁试件的 J 积分值。此结果与用柔度法所得的结果是否相同?

B-2 在平面应力时

$$\sigma(\delta) \approx \sigma_{ys} + E_w \frac{\delta}{B},$$

这里 B 为板厚, E_w 为切变模量。试求在小范围屈服时, Griffith 裂纹的 CTOD 与裂纹长度间的关系。

参 考 文 献

- 1 黄克智, 余寿文. 弹塑性断裂力学. 北京: 清华大学出版社, 1986
- 2 杨卫. 宏微观断裂力学. 北京: 国防工业出版社, 1995
- 3 M. F. Kanninen, C. H. Popelar, Advanced Fracture Mechanics, Oxford University Press, New York, 1985
- 4 David Roylance, Mechanics of Materials, John Wiley & Sons Inc. New York, 1996
- 5 陆毅中. 工程断裂力学. 西安: 西安交通大学出版社, 1987
- 6 张行. 断裂力学. 北京: 宇航出版社, 1990
- 7 张行. 断裂力学中应力强度因子的解法. 北京: 国防工业出版社, 1992
- 8 劳动部文件. 关于开展锅炉和压力容器防爆技术研究的通知. 1990
- 9 J. H. Underwood, The equivalence of K_{IC} and J_{IC} fracture toughness measurement in Ni-Cr-Mo steels, *Exper. Mech.*, 1978, 18: 350~355
- 10 GB 2038-1980. 利用 J_R 阻力曲线确定金属材料延性断裂韧度的试验方法. 1980
- 11 J. R. Rice, P. C. Paris, J. G. Merkle, Some further results of J-integral analysis and estimates. ASTM STP 536, Philadelphia: Ame. Soc. Testing & Mater., 1973, 231~245
- 12 H. E. Davis, G. E. Troxell, G. F. W. Hauck, THE TESTING OF ENGINEERING MATERIALS, Fourth Edition, McGraw-Hill Book Company, 1982
- 13 P. E. O' Donoghue, S. T. Green, M. F. Kanninen, P. K. Bowles, The development of fluid/structure interaction model for flawed fluid containment boundaries with applications to gas transmission and distribution pipings. *Computers & Structures*, 1991, 38 (5/6): 501~513
- 14 庄茁. 压力管道动态裂纹扩展和止裂问题的研究进展. 余寿文等主编. 见: 固体力学进展——黄克智教授七十寿辰庆贺文集. 北京: 清华大学出版社, 1997, 281~289
- 15 G. R. Irwin, H. T. Conten, Evaluating the feasibility of basing pipeline operating pressure on in-place hydrostatic test pressure. Report to Northern Natural Gas Company and El Paso Natural Gas Company, 1968
- 16 黄克智, 徐秉业主编. 固体力学发展趋势. 北京: 北京理工大学出版社. 1995
- 17 Z. Zhuang (庄茁), P. E. O' Donoghue. "Material Fracture Toughness Determination for Polyethylene Pipe Materials Using Small Scale Test Results", *Acta Mechanica Sinica*, 1997, 13 (1): 63~80
- 18 庄茁. 断裂动力学有限元程序的开发及在天然气管道裂纹扩展问题上的应用. *工程力学*, 1999, 16 (1): 105~114
- 19 P. E. O' Donoghue, Z. Zhuang, A finite element model for crack arrestor design in gas pipelines, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 1999, 22 (1): 59~66
- 20 G. R. Irwin, Analysis of stresses and strains near the end of a crack traveling a plate, *J. App. Mech.*, 24 (1957): 361~364

- 21 L. B. Freund, *Dynamic Fracture Mechanics*, Cambridge University Press, New York, 1998
- 22 Z. Zhuang, P. E. O' Donoghue, Steady State Analysis for Dynamic Crack Propagation in Gas Pipelines, *Key Engineering Materials* Vol. 145~149, 1998, 255~260
- 23 庄茁, P. E. O'Donoghue. 天然气管道止裂构件的分析和设计, *固体力学学报*, 1998, 19 (3), 213~226
- 24 范天佑. 断裂动力学引论. 北京: 北京理工大学出版社, 1990
- 25 J. Zhao and X. Zhang, On the process zone of a quasi-static growing tensile crack with power-law elastic-plastic damage, *International Journal of Fracture*, 2001, 108: 383~395
- 26 X. R. Wu, A. J. Carlsson, *Weight Function and Stress Intensity Factor Solutions*, Oxford, Pergamon Press, 1991
- 27 杨继运, 张行. 材料断裂韧度与试样厚度关系研究. *机械强度*, 2003, 25 (1), 076~080
- 28 张行, 赵军著. 金属构件应用疲劳损伤力学. 北京: 国防工业出版社, 1998
- 29 冯西桥, 何树研. 表面裂纹疲劳扩展的一种损伤力学方法. *清华大学学报*, 1997
- 30 Riedel H. A continuum damage approach to creep crack growth, in: Edited by B. A. Bilby et. Al. *Fundamentals of deformation and fracture*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984, 293~309
- 31 J. Zhao and X. Zhang, The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, 1995, 50 (1), 131~141
- 32 余寿文, 冯西桥. 损伤力学. 北京: 清华大学出版社. 1997
- 33 H. Liebowitz, *Fracture*, Vol. II, Chap. 3, Academic Press, 1969
- 34 J. R. Rice, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, 1968, 379~386
- 35 X. C. You, Z. Zhuang, Y. R. Feng, C. Y. Huo, C. J. Zhuang, Crack Arrest in a Rupturing Steel Gas Pipelines, *Int. J. of Fracture*, 2003, 123 (1-2) 1~14
- 36 董树勇, 庄茁, 熊守美, 柳百成. 铝合金铸件疲劳寿命预测和累积损伤评估. *机械强度*, 2003, 25 (6) 237~242

